I. SH. SLOBODETSKI, V. A. ORLOV

OLIMPIADAS DE FÍSICA

PROBLEMAS RESUELTOS

VNESHTORGIZDAT
MOSCU

I. SH. SLOBODETSKI, V. A. ORLOV

OLIMPIADAS DE FÍSICA

VNESHTORGIZDAT
MOSCU

И. Ш. СЛОБОДЕЦКИЙ, В. А. ОРЛОВ

ВСЕСОЮЗНЫЕ ОЛИМПИАДЫ ПО ФИЗИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО "ПРОСВЕЩЕНИЕ"
МОСКВА

Traducido del ruso por V.V. Chichaev
Impreso en la URSS, 1989

На испанском языке

© Издательство "Просвещение", 1982 г.

© Traducido al español. VIPO "Vneshtorgizdat", 1988.

INDICE

De los autores 3

Problemas 8

Olimpiada del IFTM 8

Olimpiada de IFTM y UEM 9

I Olimpiada de la República Federal de Rusia 11

II Olimpiada de la República Federal de Rusia 13

I Olimpiada de la Unión Soviética 14

II Olimpiada de la Unión Soviética 17

III Olimpiada de la Unión Soviética 21

IV Olimpiada de la Unión Soviética 26

V Olimpiada de la Unión Soviética 29

VI Olimpiada de la Unión Soviética 34

VII Olimpiada de la Unión Soviética 39

VIII Olimpiada de la Unión Soviética 43

IX Olimpiada de la Unión Soviética 47

X Olimpiada de la Unión Soviética 52

XI Olimpiada de la Unión Soviética 55

XII Olimpiada de la Unión Soviética 60

XIII Olimpiada de la Unión Soviética 66

XIV Olimpiada de la Unión Soviética 71

Soluciones 77

XV Olimpiada de la Unión Soviética 361

Problemas experimentales de olimpiadas republicanas 364

Indice temático de los problemas 366

DE LOS AUTORES

Las olimpiadas de escolares en la Unión Soviética tienen su historia.

En 1962 por iniciativa de las organizaciones del Partido y de la reunión de juventudes Comunistas Leninistas del Instituto fisicotécnico de Moscú (IFTM) fue efectuada por primera vez la olimpiada de escolares. Esta iniciativa fue apoyada por el Comité Central de la Unión de Juventudes Comunistas Leninistas de la Unión Soviética el cual dió instrucciones a sus comités provinciales y urbanos prestar ayuda en la realización de la olimpiada. En la olimpiada participaron más de 6 mil escolares de 68 ciudades y poblados.

El mismo año los científicos de la Sucursal Siberiana de la Academia de Ciencias de la URSS llevaron a cabo la primera olimpiada de Siberia de los alumnos de escuelas secundarias.

En 1963 la olimpiada de los alumnos de escuelas secundarias fue realizada por la Universidad Estatal de Moscú M.V. Lomonósov. En esta olimpiada tomaron parte los alumnos de las escuelas de la parte europea de la URSS y de las repúblicas de Transcaucasia.

Las olimpiadas del IFTM y de la Universidad Estatal de Moscú (UEM) fueron fisicomatemáticas (cada participante recibía una papeleta de examen la cual contenía tres problemas de física y tres problemas de matemáticas).

A partir de 1964 comenzaron a efectuarse las olimpiadas unificadas de la República Federal de Rusia. A las rondas finales de estas olimpiadas invitaban también a los equipos de todas las repúblicas federadas.

Las olimpiadas de escolares de la Unión Soviética se llevan a cabo a partir de 1967.

Entre los presidentes del jurado en las olimpiadas de física de la Unión Soviética han figurado eminentes científicos soviéticos:

I Olimpiada de la Unión Soviética (1967, Moscú), el académico I.K. Kikoin;

II Olimpiada de la Unión Soviética (1968, Ereván), el académico A.I. Alijanián;

III Olimpiada de la Unión Soviética (1969, Almá-Atá), el ministro de Instrucción Pública de la República Socialista Soviética de Kazajia K.A. Aitmánov;

IV Olimpiada de la Unión Soviética (1970, Sverdlovsk), el académico S.V. Vonsovsky;

V Olimpiada de la Unión Soviética (1971, Novosibirsk), el académico S.T. Beliáev;

VI Olimpiada de la Unión Soviética (1972, Tbilisi), el académico de la Academia de Ciencias de la República Socialista Soviética de Georgia E.L. Andronikashvili;

VII Olimpiada de la Unión Soviética (1973, Leningrado), el miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS N.D. Kondrátiev;

VIII Olimpiada de la Unión Soviética (1974, Gorky), el académico A.V. Gapónov-Grékhov;

IX Olimpiada de la Unión Soviética (1975, Kaluga), el doctor en ciencias fisicomatemáticas L.N. Usachev;

X Olimpiada de la Unión Soviética (1978, Minsk), el profesor de la Universidad Estatal de Bielorrusia S.Ya. Shushkévich;

XI Olimpiada de la Unión Soviética (1977, Frunze), el profesor L.V. Túzov;

XII Olimpiada de la Unión Soviética (1978, Ashjabad), el vicepresidente de la Academia de Ciencias de la República Socialista Soviética de Kazajia O. Ovezgueldíev;

XIII Olimpiada de la Unión Soviética (1979, Lvov), el miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de la República Socialista Soviética de Ucrania I.R. Yujnovsky;

XIV Olimpiada de la Unión Soviética (1980, Riga), el profesor I.K. Vitols.

Las competencias de las olimpiadas de la República Federal de Rusia y de la primera Olimpiada de la Unión Soviética consistían en la solución de problemas de cálculo exclusivamente. A partir de la II Olimpiada de la Unión Soviética se incluían también problemas experimentales.

Las olimpiadas de 1963–1970 comenzaban con la ronda por correspondencia. Sus ganadores se invitaban a las rondas provinciales. Después de 1970 las funciones de la ronda por correspondencia de la olimpiada fueron ejercidas por el concurso de solución de problemas organizado por la revista "Kvant". 150 ganadores de las rondas provinciales competían en la ronda final.

Para solucionar los problemas de olimpiadas se requieren conocimientos y hábitos que no exceden de los límites del programa de la escuela secundaria. La solución de estos problemas, como regla, no trae consigo la necesidad de ejecutar cálculos voluminosos. Al mismo tiempo para solucionar un problema de olimpiada no es suficiente saber aplicar un algoritmo ampliamente conocido. Los problemas de olimpiadas exigen de los alumnos la comprensión clara de las leyes fundamentales, el saber realmente creador de aplicar estas leyes para explicar los fenómenos físicos, el pensamiento asociativo desarrollado y la intelectiva.

Cada variante habitualmente comprende cinco problemas de distinto grado de dificultad: dos problemas fáciles, un problema de dificultad mediana y dos difíciles. (La verdad es que resulta bastante complicado formular qué es un problema fácil y un problema difícil. A veces ocurre que un problema considerado difícil por el jurado se soluciona por la mayoría de los participantes de la olimpiada y, al contrario, el problema "fácil" en realidad resulta difícil).

Los problemas experimentales, convencionalmente, pueden ser divididos en tres tipos:

1) medición de algún parámetro del cuerpo o del sistema de cuerpos (densidad, masa, rendimiento, resistencia eléctrica, inductancia, etc.),

2) establecimiento de alguna relación (entre el rendimiento del plano inclinado y el ángulo de inclinación del mismo, entre la resistencia de la lámpara y la intensidad de la corriente, entre la intensidad de la corriente de fusión del conductor y su diámetro, entre la frecuencia de oscilaciones de la cuerda y la fuerza de su tensado, etc.);

3) determinación del circuito cinemático, eléctrico u óptico de la "caja negra" y de los parámetros de los elementos de este circuito.

Al cumplir todas las tareas experimentales los alumnos obtienen unos resultados nuevos para ellos. (Con el mismo objetivo se realiza también el experimento en la ciencia: descubrir nuevas regularidades de la naturaleza, medir los parámetros que caracterizan los fenómenos físicos y los procesos técnicos).

Comunmente una tarea experimental tiene varios modos de solución. Al cumplirla el alumno debe analizar cada uno de los mismos, apreciar la precisión de los resultados correspondientes y seleccionar el método óptimo. Una importancia especial la tienen las tareas que son factibles en cierta parte suya para cada alumno, pero al mismo tiempo contienen elementos que puedan ser notados sólo por los alumnos más perspicaces.

Como regla, las tareas experimentales corresponden al equipamiento del cual están dotados los gabinetes tipo de física de las escuelas de enseñanza general.

Para calificar el cumplimiento de las tareas experimentales se toman en consideración los siguientes elementos: la fundamentación teórica del trabajo, el método seleccionado de su realización, el proceso de ejecución de las mediciones, la apreciación de los errores de mediciones y la discusión de los resultados del trabajo efectuado. Se toma en consideración también la calidad de presentación del informe sobre el trabajo efectuado y la observación de las normas de la técnica de seguridad.

A los participantes de la olimpiada se les concede la posibilidad de discutir la justeza de control del trabajo, deliberar su solución con los miembros del jurado. Con ello a veces resulta que a pesar del control meticuloso del trabajo ha sido cometido un error.

Los ganadores de la olimpiada son premiados con diplomas de I, II y III grados, diplomas de honor, obsequios de valor y premios especiales

(bibliotecas de física y matemáticas, instrumentos de medida, radiorreceptores y otros). Los premios especiales se otorgan a los escolares por las mejores soluciones de un u otro problema, así como al participante más joven, a la participante de la olimpiada cuyos resultados fueron los mejores entre las jóvenes, etc. Todos los participantes de la olimpiada reciben insignias recordatorias. Los alumnos de 8 y 10 grados premiados con diplomas de I y II grados reciben la invitación de participar en la ronda final de la olimpiada del año siguiente independientemente de los resultados de su participación en las olimpiadas republicanas, provinciales y otras. Los alumnos de 10 grados premiados con diplomas de I y II grados junto con los diplomas reciben recomendaciones a los centros docentes superiores de orientación físicomatemática. De los alumnos de décimo grado que salieron ganadores de las olimpiadas de la Unión Soviética se seleccionan candidatos a los equipos de la URSS para las Olimpiadas internacionales de física que se llevan a cabo a partir de 1967.

En este libro se exponen los poblemas ofrecidos en las primeras olimpiadas efectuadas por el Instituto Fisicotécnico de Moscú (IFTM) y la Universidad Estatal de Moscú M.V. Lomonósov (UEM), en las rondas finales de I y II Olimpiadas de la República Federal de Rusia y de las I-XIV Olimpiadas de la Unión Soviética. Con fines de hacer más cómodo el uso del libro, éste está provisto del índice temático de problemas. Con su ayuda es más fácil hallar problemas de un tema determinado. La verdad es que hay que tener en cuenta que muchos de estos problemas son combinados, o sea tienen relación con varios temas a la vez.

Para resumir creemos necesario nombrar a los que tomaron parte más activa en la composición de los problemas y en la realización de las olimpiadas. Son catedráticos del Instituto Fisicotécnico de Moscú profesores S.M. Kozel, G.I. Kosoúrov, V.E. Belonuchkin, A.L. Stasenko, L.P. Bakánina, Z.V. Oganésova, V.E. Skorovárov, catedráticos de la Universidad Estatal de Novosibirsk y colaboradores de la Sucursal Siberiana de la Academia de Ciencias de la URSS I.F. Guinzburg, G.L. Kotkin, O.Ya. Sávchenko, S.A. Kheifen, A.T. Drozdov, el docente del Instituto Fisicotécnico de Moscú N.I. Goldfarb, catedráticos de la Universidad Estatal de Moscú B.B. Bujóvtsev, S.S. Krótov, colaboradores científicos de los institutos de la Academia de Ciencias de la URSS Yu.M. Bruk, A.R. Zilberman, E.L. Surkov, el catedrático del Instituto de Acero y Aleaciones de Moscú L.G. Aslamázov, catedráticos de la Universidad Estatal de Leningrado E.I. Bútikov, A.S. Kondrátiev, A.A. Bíkov, el colaborador científico de la Academia de Ciencias Pedagógicas de la URSS O.F. Kabardin, maestros M.M. Balashov y N.A. Patrikéieva. Todo este colectivo grande, con el presidente constante del Comité Central de organización de la Olimpiada de escolares de la Unión Soviética académico I.K. Kikoin al frente, es fuertemente cohesionado por la colaboración y amistad de muchos años.

Los autores de este libro quienes participaron a lo largo de muchos años en la ejecución de las olimpiadas de física, sistematizaron los problemas ofrecidos en las olimpiadas, seleccionaron y precisaron las soluciones más interesantes de los mismos. El trabajo con los problemas de cálculo fue realizado por I.Sh. Slobodetski, mientras que con los problemas experimentales trabajó V.A. Orlov.

PROBLEMAS

OLIMPIADA DEL IFTM
(1962, Moscú)

Variante 1

1. Al extremo de un muelle colgado verticalmente, cuya masa puede ser menospreciada, se suspende un peso con la masa m. Luego al centro del muelle ya extendido se suspende un peso más de la misma masa. Determinar el largo del muelle extendido. La rigidez del muelle es igual a k, mientras que su largo en el estado no extendido es l_0.

2. En las puntas y en el centro de una barra de peso insignificante con el largo l se hallán unas bolitas iguales. La barra se dispone verticalmente y se suelta. Considerando como nula la fricción entre el plano y la bolita inferior, hallar la velocidad de la superior en el momento de golpear ésta contra la superficie horizontal. ¿Cómo varía la respuesta, si la bolita inferior está fijada articuladamente?

3. Un cable de tranvía se ha roto y está tendido sobre la tierra. El hombre que lleva calzado conductor de corriente, puede acercarse al mismo sólo a pasos pequeños. Dar pasos grandes encierra peligro. Explicar ¿por qué?

Variante 2

4. Una barreta con la masa M se encuentra sobre una mesa horizontal lisa por la cual puede moverse sin fricción. Sobre la barreta se halla un cubo con la masa m que se apoya en un pequeño saliente 0 (fig. 1). ¿Cuál es el valor máximo del módulo de la fuerza $\vec{F}$ aplicada a la barreta que no causa el vuelco del cubo?

5. Un péndulo matemático ha sido desviado al ángulo de 90° de la vertical y suelto. En el momento de pasar el péndulo la posición de equilibrio el punto de su suspensión comenzó a moverse hacia arriba con la aceleración $\vec{a}$. ¿A qué ángulo máximo se desviará el péndulo de la vertical?

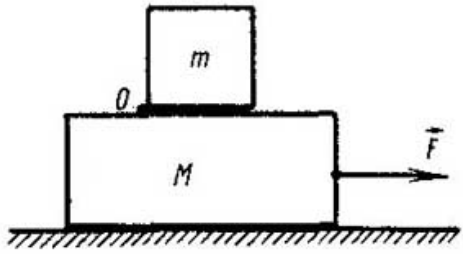


Fig. 1

6. Sobre una mesa horizontal lisa se halla una barra metálica con el largo l y la masa m la cual puede desplazarse por la mesa sin fricción. A una de las puntas de esta barra está fijada una cuerda no conductora pasada por un motón sujeto en la extremidad de la mesa (fig. 2). Del otro extremo de la cuerda pende otra barra igual. Puesto en libertad, el sistema se pone a moverse. Hallar la tensión (diferencia de potencial) entre las puntas de cada una de ambas barras. La fricción en el eje del motón y la masa de la cuerda pueden ser menospreciadas.

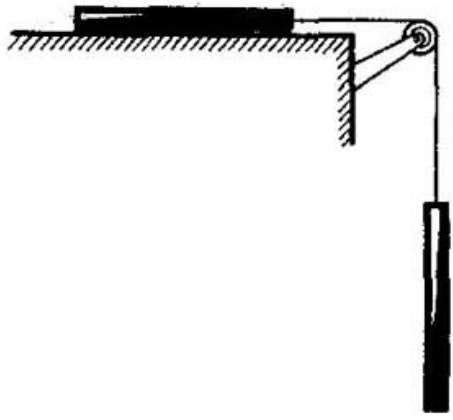


Fig. 2

OLIMPIADA DE IFTM Y UEM
(1963, Moscú)

Variante 1

7. Dos planos lisos se hallan inclinados respecto al horizonte y entre sí bajo los ángulos de 60°. ¿Cómo es preciso situar un cubo entre estos planos para que se encuentre en equilibrio? La fricción entre los planos y el cubo puede ser menospreciada.

8. Hallar la capacidad del sistema de condensadores iguales representado en la figura 3. La capacidad de cada uno de los condensadores es igual a C.

9. Sobre un plano horizontal se encuentra una barreta con la masa m_1 y sobre la misma se halla otra barreta con la masa m_2.

A través de un sistema de motones representado en la figura 4 está pasada una cuerda. Al motón volante se halla suspendida una carga cuya masa es $M = m_1 + m_2$.

¿Para cuál relación entre las masas m_1 y m_2 las barretas no van a deslizar una por otra, si el coeficiente de fricción entre las barretas es igual a μ, mientras que el coeficiente de fricción de la barreta inferior contra el plano es igual a cero? La cuerda puede considerarse imponderable e inextensible y la masa de los motones y la fricción en los mismos, menospreciarse.

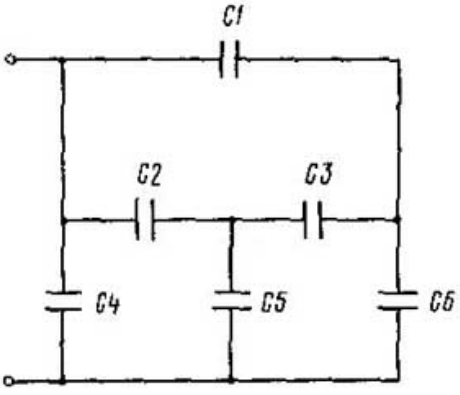


Fig. 3

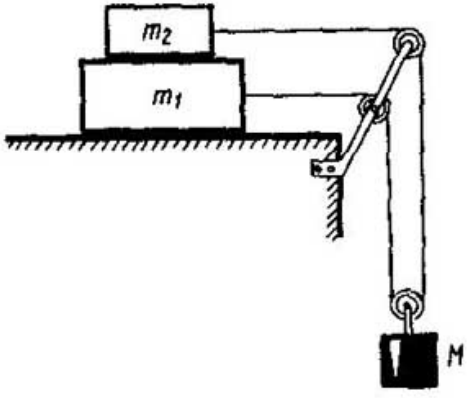


Fig. 4

Variante 2

10. Dos dinamos producen tensión continua: una de 110 V y la otra de 220 V. ¿Qué tensión acusará el voltímetro conectado al "más" de una dinamo y al "menos" de otra?

11. Dos cubos iguales se hallan situados sobre un plano horizontal y apretados entre topes mediante un muelle (fig. 5). ¿Cómo se va a mover el sistema si es retirado uno de los topes?

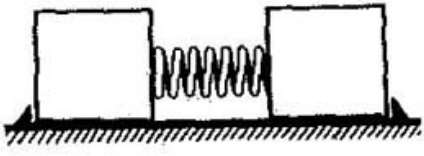


Fig. 5

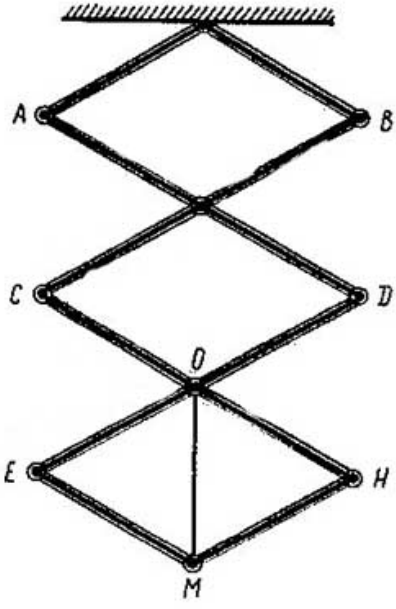


Fig. 6

12. Hay una suspensión constituida por varillas articuladamente unidas entre sí (fig. 6). Las varillas AD, BC, DE y CH son enteras. Entre los puntos O y M está tendida una cuerda. Determinar la fuerza T de tensión de la cuerda OM si la masa de todo el sistema es igual a m.

I OLIMPIADA DE LA REPUBLICA FEDERAL DE RUSIA
(1965, Moscú)

13. Un vidrio de color está hecho polvo que parece ser completamente blanco. ¿Cómo llegar a conocer el color original del vidrio?

14. Cuatro conductores iguales se alojan en un tubo que va del tercer al cuarto piso de un edificio. Los conductores asoman del tubo en cada uno de estos pisos. Los conductores están numerados en los extremos que asoman en el tercer piso. Hace falta poner los mismos números en los extremos que asoman en el cuarto piso. ¿Cómo, disponiendo de una pila, una bombilla, un trozo corto de alambre y ejecutando la cantidad mínima de tentativas, determinar qué número corresponde a cada uno de los extremos en el cuarto piso?

15. La bombilla de linterna de bolsillo calculada para la tensión de 3,5 V y la intensidad de la corriente de 0,28 A fue conectada en serie con una bombilla de 110 W de potencia calculada para la tensión de 220 V. Con ello la bombilla de linterna de bolsillo se quemó. ¿Por qué ocurrió esto?

16. ¿En qué dirección rodará la bobina, si se tira de la cuerda como se muestra en la figura 7? La fricción entre la bobina y el piso es grande.

17. ¿Por qué un ciclista puede moverse mucho más rápido que un corredor aunque en ambos casos el trabajo se realiza a costa de la energía muscular del hombre?

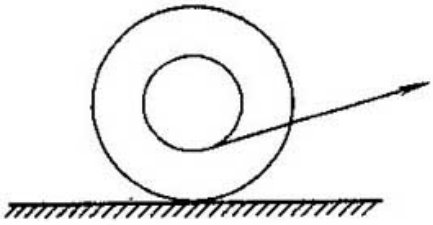


Fig. 7

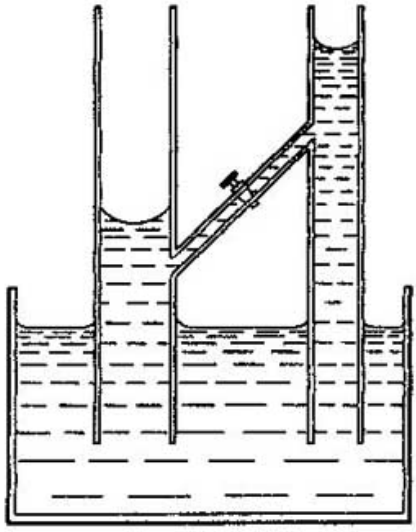


Fig. 8

18. Dos capilares de diferente diámetro se hallan sumergidos en parte en un vaso (fig. 8). Los capilares comunican entre sí por un tubo con grifo. ¿Qué ocurrirá, si se abre este grifo?

19. Demostrar que una bolita elástica imponderable lanzada al rincón de una habitación saldrá del mismo en dirección paralela a la que había sido lanzada.

20. Demostrar que a la temperatura del cero absoluto el cuerpo sólido debe ser cristalino.

21. ¿Por qué al portero del equipo de fútbol le sería difícil sacar lejos de la portería una bola de madera o un balón poco inflado?

22. Sobre un plano inclinado se halla una moneda. ¿Cómo va a moverse la moneda, si se le comunica el impulso horizontal paralelo al borde inferior del plano inclinado?

23. Dos planos cruzados están uniformemente cargados con carga negativa. En cierto punto entre los planos se halla situado un manantial radiactivo. Trazar la vista aproximada de las trayectorias de movimiento de las partículas cargadas positiva y negativamente emitidas por el manantial. ¿Qué son estas curvas?

24. Dos poleas están unidas mediante una transmisión por correa. La polea conducida, dando vueltas, levanta la carga. Con ello se realiza cierto trabajo. La energía indispensable para que se realice el trabajo se transmite de la polea conductora a la conducida por una correa como energía potencial de la deformación elástica de la correa extendida. Pero, como se observa en la figura 9, las partes extendidas de la correa que portan la energía no se mueven a partir de la polea conductora a la conducida, sino al revés. ¿Cómo se produce la transmisión de la energía de la polea conductora a la conducida?

Fig. 9

25. ¿Por qué los peces que nadan en el río, se observan mejor desde un puente que desde la orilla baja?

26. Hay dos iguales transformadores ideales con el coeficiente de transformación (relación del número de espiras) K = 1/3. El arrollamiento primario de uno de ellos está conectado en serie con el arrollamiento secundario del otro, mientras que los extremos libres de estos arrollamientos están conectados en el circuito de corriente alterna con la tensión U_0 = 100 V. El arrollamiento secundario del primer transformador está conectado en serie con el arrollamiento primario del segundo. Determinar la amplitud U_m de tensión alterna entre los extremos libres de estos arrollamientos.

II OLIMPIADA DE LA REPUBLICA FEDERAL DE RUSIA
(1966, Moscú)

27. ¿Por qué un alambre fino de cobre se funde en la llama de hornillo de gas, mientras que una varilla gruesa de cobre incluso no se calienta al rojo?

28. ¿Para qué es necesario el imán permanente en el auricular de teléfono? ¿Cómo hay que modificar el circuito de la línea telefónica con objeto de pasar sin este imán?

29. ¿De qué depende la indicación del termómetro fijado por fuera al sputnik de su lado sombrío?

30. Explicar ¿por qué el hombre puede correr por el hielo fino sobre el cual no puede permanecer parado sin hundirse?

31. Por la superficie de una mesa con velocidad constante se mueve una tabla negra. Por la tabla se mueve un trozo de tiza hecho desplazarse por la misma de modo que en el momento inicial la velocidad de la tiza respecto a la mesa fue perpendicular a la velocidad de la tabla. ¿De qué forma es la traza que va dejando la tiza durante su movimiento?

32. Dos sputniks se mueven por una órbita circular a cierta distancia uno de otro. En el sputnik "perseguidor" por corto tiempo se pone en marcha el motor que comunica al sputnik un impulso adicional por la tangente a la trayectoria. ¿Se encontrarán los sputniks después de ello?

33. En la calle el día entero cae fría llovizna de otoño. En la cocina se halla tendida mucha ropa lavada. ¿Se secará más rápido la ropa si abrimos la ventanilla?

34. ¿Cuál de los palos es más fácil mantener verticalmente en equlibrio sobre un dedo (fig. 10): el corto o el largo?

Fig. 10

35. ¿Por qué se puede ir en bicicleta sin agarrar el timón?

36. ¿Por qué a la cometa de papel se le pone la cola?

37. Apreciar el tiempo de colisión elástica entre dos cubos metálicos iguales que chocan con sus facetas laterales.

38. ¿Cómo varía la luminosidad de la imagen del planeta observado en el telescopio, cuyo objetivo tiene el diámetro D = 80 mm y la distancia focal F = 800 mm, al sustituir el ocular con la distancia focal F_1 = 50 mm por el ocular con la distancia focal F_2 = 100 mm o por uno con la distancia focal F_3 = 25 mm? El diámetro de la pupila del ojo se toma igual a α_0 = 5 mm.

39. Hay una dinamo con excitación independiente, el inducido de la cual está provisto de dos arrollamientos completamente iguales con la resistencia R. Cada uno de los arrollamientos está conectado con uno de dos colectores iguales. Uno de los arrollamientos está acoplado a un manantial con la tensión U. El otro arrollamiento se halla cerrado al resistor con la resistencia r. ¿Cómo depende la velocidad angular de rotación del inducido y la intensidad de la corriente en cada uno de los arrollamientos del valor de la resistencia r?

40. Un recipiente cerrado está lleno de agua con la temperatura de 27 °C. ¿Cuál será la presión dentro del recipiente en caso de desaparecer de súbito la interacción entre las moléculas de agua?

41. El punto de suspensión de un péndulo matemático cuya longitud es L, ejecuta oscilaciones horizontales; con ello su coordenada x cambia con el tiempo t según la ley $x = a \cos \omega t$. Adoptando que las oscilaciones son pequeñas, hallar la amplitud y la fase de las oscilaciones forzadas del péndulo.

I OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1967, Moscú)

42. (8vo grado). En un vaso cilíndrico se vierte el agua. ¿Con qué nivel de agua el cento de gravedad del vaso con el agua ocupa la posición inferior?

43. (8vo grado). ¿Cómo determinar la dirección de rotación del

motor de un molino eléctrico de café, si el casco del mismo no es transparante?

44. (8vo grado). En el interior de una caja opaca cerrada se encuentra un circuito eléctrico integrado sólo por resistores. Tres puntos de este circuito tienen los terminales 1, 2 y 3 por fuera de la caja. El ohmímetro acoplado a los terminales 1 y 2 acusa 3 Ohms; el acoplado a los terminales 2 y 3, 5 Ohms; a los terminales 1 y 3, 6 Ohms. Trazar los circuitos con el menor número posible de resistores que pueden hallarse dentro de la caja.

45. (8vo grado). Para cada uno de tres esquemas de conexión del reóstato R (fig. 11) trazar los gráficos de dependencia entre la resistencia total R_0 del circuito y la resistencia r de la parte izquierda (según la figura) del reóstato (hasta el cursor).

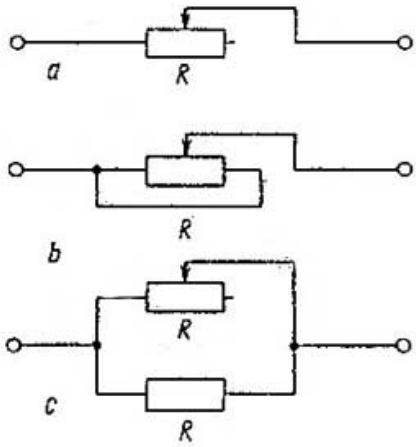


Fig. 11

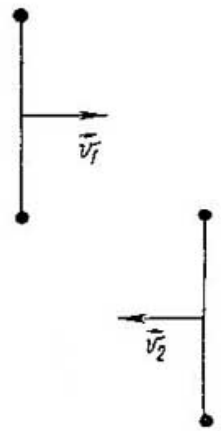


Fig. 12

46. (9no grado). Una cadena compuesta por iguales muelles cortos con la rigidez k y la masa m de cada uno se halla suspendida de un extremo. ¿Cuánto se extenderá esta cadena? La extensión del muelle ocasionada por la fuerza de gravedad puede menospreciarse.

47. (9no grado). ¿En cuál caso la bala que perfora dos cajas en una de las cuales se halla la miel y en la otra el agua, volará más lejos: si primero da en la caja con la miel o si primero da en la caja que contiene agua?

48. (9no grado). Dos pesitas iguales vuelan una al encuentro de otra (fig. 12). ¿Cómo se van a mover después de la colisión? Adoptar como pequeño el tamaño de las bolitas fijadas en los extremos de las pesitas en comparación con el tamaño de las últimas. Las colisiones de las bolitas son absolutamente elásticas.

49. (9no grado). En un soporte se halla un cuerpo con la masa m suspendido en un muelle con la rigidez k (fig. 13). En el momento inicial el muelle no está extendido. El soporte comienza a descender con la aceleración a. ¿Dentro de qué tiempo el soporte se separará del cuerpo? ¿Cuál será la extensión máxima del muelle?

50. (9no grado). El gráfico de dependencia entre el volumen del cuerpo y la temperatura en el intervalo desde 0 °C hasta la temperatura

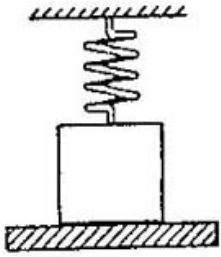


Fig. 13

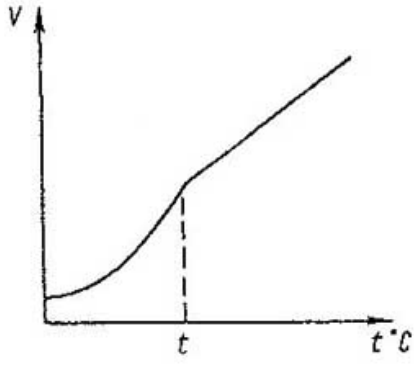


Fig. 14

t_1 constituye una parábola que pasa con $t = t_1$ a ser una recta, la que no es tangente de la parábola (fig. 14).

¿Cómo depende el coeficiente de expansión térmica de este cuerpo de la temperatura siendo $t < t_1$ y $t > t_1$?

¿Qué se puede decir sobre el coeficiente de expansión del cuerpo en cuestión con $t = t_1$?

51. (9no grado). ¿Cómo depende el calor de vaporación del líquido y el coeficiente de tensión superficial de la temperatura? La respuesta debe ser fundamentada teóricamente.

52. (10mo grado). ¿Cómo va a cambiar la corriente en el circuito del solenoide (fig. 15), si enderezamos rápidamente el solenoide tirando de los extremos del alambre?

53. (10mo grado). Demostrar que el haz paralelo de rayos luminosos, que cae sobre una bola homogénea de vidrio, no puede abandonar la misma siendo paralelo.

54. (10mo grado). En el centro de un condensador plano cargado hasta la tensión U se encuentra una pequeña bolita metálica con el radio r. ¿Qué carga aparecerá en la bolita, si la conectamos mediante conductor con una de las placas? La redistribución de la carga a lo largo de las placas del condensador ocasionada por la bolita puede menospreciarse.

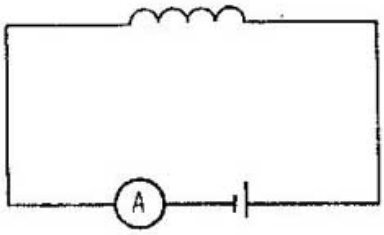


Fig. 15

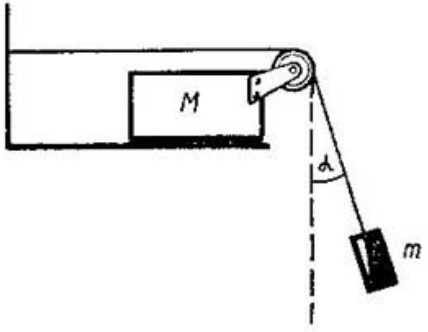


Fig. 16

55. (10mo grado). ¿Qué diferencia máxima de potenciales podría Ud. obtener disponiendo de una pila con la f.e.m. igual a $\mathcal{E}$ y dos condensadores iguales sin fugas.

56. (10mo grado). En el sistema mecánico representado en la figura 16, la barreta, cuya masa es M, puede resbalar por los rieles sin fricción. En el momento inicial la carga suspendida en hilo se desvía de la vertical al ángulo α y se suelta. ¿Cuál es la masa m de esta carga, si el ángulo formado por el hilo con la vertical no varía durante el movimiento del sistema?

II OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1968, Ereván)

PRIMERA RONDA

57. (8vo grado). En un recipiente cilíndrico dispuesto verticalmente cuyo fondo tiene la superficie S se encuentra un líquido con la densidad ρ. ¿Cómo variará el nivel del líquido en el recipiente, si en el mismo se deja caer un cuerpo con la masa m de forma libre que tiene en su interior heterogeneidades y oquedades y es insumergible?

58. (8vo grado). En el calorímetro se echa $m_1 = 0{,}5$ kg de agua con la temperatura $t_1 = +15$ °C. En el agua se mete un trozo de hielo con la masa $m_2 = 0{,}5$ kg que tiene la temperatura $t_2 = -10$ °C. Hallar la temperatura de la mezcla después de haber establecido el equilibrio térmico.

El calor específico del agua es $c_1 \approx 4{,}2 \cdot 10^3$ J/kg·K), el calor específico del hielo es $c_2 \approx 2{,}1 \cdot 10^3$ J/(kg·K), el calor específico de fusión del hielo es $\lambda \approx 3{,}3 \cdot 10^5$ J/kg.

59. (8vo grado). En el eje óptico principal de una lente convergente se halla un punto luminoso a la distancia $d > 2F$ (en donde F es la distancia focal de la lente). La lente está cortada en dos mitades, las que están

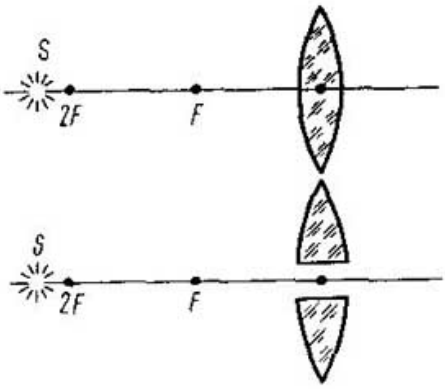


Fig. 17

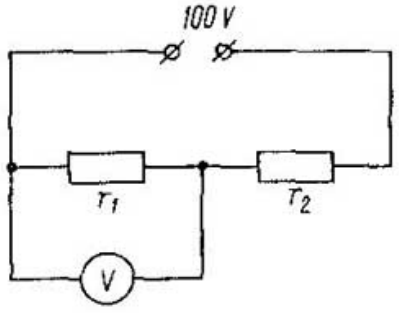


Fig. 18

apartadas a cierta distancia como se muestra en la figura 17. ¿Cómo será la imagen del punto luminoso?

60. (8vo grado). El circuito eléctrico está montado según el esquema reproducido en la figura 18. El voltímetro acoplado en paralelo al resistor r_1 con la resistencia $r_1 = 0{,}4$ Ohm acusa $U_1 = 34{,}8$ V. La tensión en los bornes del manantial de corriente se mantiene constante e igual a 100 V. Hallar la relación de la intensidad de corriente que pasa por el voltímetro, a la intensidad de corriente que pasa por el resistor r_2 con la resistencia $r_2 = 0{,}6$ Ohm.

61. (8vo grado). ¿Por qué en marzo la duración del día cambia más rápido que en diciembre?

62. (8vo grado). Demostrar que en la atmósfera isotérmica la fuerza sustentadora del aeróstato con envoltura elástica no depende de la altura de elevación del mismo para cualquier ley de variación de la presión con la altura.

63. (9no grado). Un hombre corre por una cinta infinita puesta sobre dos rodillos horizontales, en los ejes de los cuales no hay fricción (fig. 19).

Según la ley de conservación del impulso el centro de masas del sistema "hombre - cinta" permanece invariable. Dado que la posición

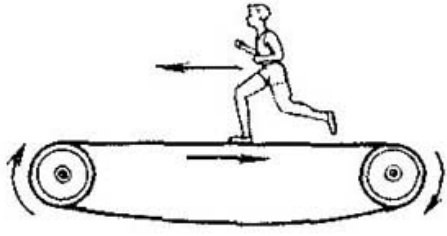


Fig. 19

del centro de masas de la cinta en movimiento no cambia, la posición del centro de masas del hombre también ha de quedarse invariable respecto a la Tierra.

No obstante, la experiencia demuestra que el hombre corriendo puede abandonar la cinta. Explicar este hecho.

64. (9no grado). ¿Qué fuerza F debe aplicar el hombre con la masa m para desplazar la caja cuya masa es M. Los coeficientes de fricción del hombre y de la caja contra el piso son iguales y equivalen a μ. Adoptar que $M > m$.

65. (9–10 grados). De dos trozos iguales de alambre de acero han torcido dos muelles. El diámetro de las espiras de un muelle es d y el del otro, 2d. Bajo la acción de una carga el primer muelle se ha extendido en 1/10 parte de su longitud. ¿En que parte de su longitud se extenderá el otro muelle accionado por la misma carga?

66. (9–10 grados). En una cacerola grande con agua hervida flota una cazuela pequeña con agua fresca. La cacerola grande se coloca sobre un hornillo. Con ello el agua en la cazuela pequeña se pone a hervir antes que en la cacerola grande. Explicar este experimento.

67. (10mo grado). La intensidad del campo eléctrico en la onda electromagnética con la frecuencia $\omega = 2 \cdot 10^{16} c^{-1}$ modulada en amplitud con la frecuencia $\Omega = 2 \cdot 10^{15} c^{-1}$ varía con el tiempo según la ley $E = a(1 + \cos \Omega t) \cos \Omega t$ (en donde a es la constante). Determinar la energía de los electrones expulsados por esta onda de los átomos de hidrógeno gaseoso con la energía de ionización Wi = 13,5 eV. El átomo absorbe la luz monocromática por porciones (cuantos) cuya energía es $\hbar\omega$ (en donde $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ J · s es la constante de Planck).

68. (10mo grado). A la distancia R del centro de una bola metálica no cargada se halla la carga puntual q. Determinar el potencial de la bola.

69. (10mo grado). Es sabido que el satélite artificial de la Tierra puede ser lanzado de modo que esté inmóvil encima de un mismo punto geográfico de la Tierra. ¿Se puede lanzar el satélite de tal modo que parezca inmóvil respecto a las estrellas?

SEGUNDA RONDA

70. (8vo grado). ¿Cómo se puede determinar la densidad de la piedra de forma incorrecta. Determinar la densidad de la piedra.

Aparatos y materiales: dinamómetro, piedra, recipientes con agua.

71. (8vo grado). ¿Cómo determinar la densidad del líquido sin disponer de la balanza haciendo uso de una probeta graduada cuya masa es conocida?

Aparatos y materiales: la probeta graduada de masa conocida, el líquido a investigar y el recipiente con agua.

72. (8vo grado). Están dados un amperímetro, un voltímetro, una

fuente de alimentación, un resistor con resistencia desconocida y cables de conexión. Medir la resistencia del resistor con una precisión máxima.

73. (8vo grado). Comparar la conductibilidad térmica de dos alambres de tamaño igual compuestos de materiales diferentes.

Utillaje: dos trozos de alambre de tamaño igual hechos de materiales diferentes, una regla y una vela.

74. (8vo grado). Calcular y hacer del papel para periódicos un globo que se llena con aire caliente (el globo puede tener una forma cualquiera). La densidad del aire atmosférico es $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m^3; la densidad del aire caliente, $\rho_1 = 1{,}0$ kg/m^3. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del globo a hacer?

75. (9no grado). A flor de agua se halla en estado de reposo un bote. El hombre que se encuentra en el mismo pasa de la popa a la proa. ¿Cómo va a moverse el bote, si la fuerza de resistencia al movimiento es proporcional a la velocidad del bote?

76. (9no grado). Aquel quien observaba el bote remolcando otro igual, podía notar que el cable de remolque no está tenso todo el tiempo. ¿Por qué? ¿Cómo cambia la tensión del cable durante el remolque del bote? La potencia del remolcador es constante.

77. (9no grado). En un cilindro largo de paredes termoaisladas se halla un gas. El recipiente está cerrado con un émbolo termoaislado. Al émbolo se le comunicó instantáneamente una velocidad constante. ¿Cómo variará la temperatura del gas? ¿Cómo depende la variación de la temperatura del gas de la velocidad del émbolo?

78. (9–10 grados). Dos delfines se mueven al encuentro. Uno de ellos emite impulsos sonoros con la frecuencia de repetición ν. ¿Con qué frecuencia ν' llegan estos impulsos al otro delfín si la velocidad de los delfines respecto al agua es igual a v? La velocidad del sonido en el agua es c.

79. (10mo grado). Si se mira a un tubo capilar, cuyo radio exterior es R, de costado, el radio interior visible del capilar es igual a r. ¿Cuál es el radio interior verdadero r_0 del capilar? El índice de refracción de cristal es igual a n.

80. (10mo grado). Un recipiente cilíndrico alto contiene un líquido. Sobre la superficie del líquido se halla un émbolo que no conduce calor. Las paredes del recipiente son termoaisladas, mientras que a través del fondo del mismo al líquido se le comunica calor cuya cantidad proporcionada en una unidad de tiempo es constante. ¿Cómo depende la altura de elevación del émbolo del tiempo, si el calor se proporciona bastante lento?

81. (10mo grado). ¿En qué dirección se desviará la partícula cargada que pasa a gran distancia del dipolo (un par de cargas contrarias $+q$ y $-q$ situadas una cerca de otra)? Al principio la velocidad de la partícula es paralela al dipolo (el ángulo de desviación es pequeño).

III OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1969, Almá-Atá)

RONDA TEORICA

Variante 1

82. (8vo grado). En una guirnalda constituida de un gran número de bombillas iguales, cada una de las cuales estaba calculada para la tensión de 12 V, se ha fundido una de ellas. Sustituyendo la bombilla quemada el alumno se dió cuenta que si en lugar de ésta se conecta una calculada para la tensión de 6,3 V, la misma no se funde. Al ser conectada la bombilla calculada para 12 V, ésta se quema. ¿Cómo se puede explicarlo?

83. (8vo grado). En tres vasos cilíndricos comunicantes, cuyos ejes se encuentran a distancias iguales a uno de otro (fig. 20), se halla agua. En todos los cilindros la superficie de agua está cubierta por émbolos de espesor igual hechos de un mismo material. A los émbolos en varillas verticales se halla fijado un palo muy liviano. ¿A cuál punto del mismo ha de fijarse la carga para que no se altere el equilibrio ni varíe la posición del palo? Los diámetros de los vasos están señalados en la figura 20.

84. (8vo grado). Un cuerpo cuya masa es $M = 2$ kg y el volumen $V = 10^{-3}$ m^3 se encuentra en un lago a la profundidad de $h_0 = 5$ m. ¿Qué trabajo ha de efectuarse para elevarlo a la altura $H = 5$ m sobre la superficie de agua? ¿Equivale el trabajo realizado con ello a la variación de la energía potencial del cuerpo?

85. (8vo grado). Un sistema óptico proporciona la imagen real del objetivo. ¿Se puede hallar tal posición de la lente divergente con la distancia focal de 1 m, en la que la imagen seguirá siendo real, pero tres veces más grande? Resolver el problema mediante el trazado.

86. (9no grado). Una botella con limonada es fuertemente sacudida, con ello se forman muchas burbujas de diferente diámetro. ¿Por qué al

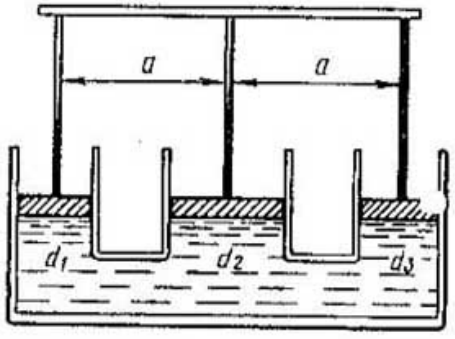


Fig. 20

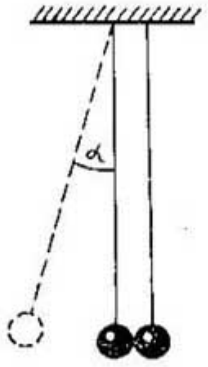


Fig. 21

cabo de cierto tiempo, después de haber colocada la botella sobre la mesa, junto a la superficie las burbujas grandes se sitúan encima de las pequeñas?

87. (9no grado). Hallar la presión que reina en el centro de cada planeta con el radio R, si el líquido es incompresible y posee la densidad ρ. El volumen de la esfera con el radio R se calcula por la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

88. (9no grado). Se dispone de un interruptor y dos lámparas eléctricas en el zócalo de una de las cuales está escrito 75 W, 220 V, mientras que en el de la otra, 15 W, 220 V. Componer el circuito eléctrico que satisfaga las siguientes condiciones: cuando el interruptor se halla en la posición "conectado", luce sólo la lámpara de 75 W; al disponerlo en la posición "desconectado" esta lámpara se apaga, pero se enciende la lámpara cuya potencia es 15 W. Trazar el esquema de este circuito y explicar el funcionamiento del mismo.

89. (9–10 grados). Dos bolitas se hallan suspendidas junto en unos hilos de largo igual (fig. 21). La izquierda según la figura estaba desviada al ángulo α y suelta. Al chocar las bolitas, la izquierda se detiene, mientras que la derecha se desvía al ángulo β. ¿A qué ángulo se desviará la bola izquierda a efecto del segundo choque? Adoptar que en cada colisión se transforma en calor una misma porción de la energía potencial de deformación de las bolas.

90. (9–10 grados). Sobre una pelota de tenis de la altura de 1 m cae un ladrillo y salta casi a 1 m. ¿A qué altura salta la pelota?

91. (10mo grado). Para calentar 1 kg de un gas desconocido en 1 K con una presión constante se requiere 912 J, mientras que para efectuar el calentamiento con constante volumen, 649 J. ¿Qué gas es este?

92. (10mo grado). Los inducidos de dos motores eléctricos iguales de corriente continua son coaxiales y se hallan rígidamente unidos entre sí. A los devanados de los inducidos están conectados unos manantiales de corriente iguales con la f.e.m. equivalente a $\mathcal{E}$. Con ello, la velocidad angular de rotación de los inducidos, funcionando los motores sin carga, es igual a ω_0. Si los motores son frenados del todo, la intensidad de corriente en los inducidos resulta igual a I_0.

Uno de los manantiales es reconectado de modo que sean opuestos los momentos de rotación de los motores. ¿Qué momento de rotación ha de ser aplicado a los inducidos unidos para que giren con la velocidad angular preestablecida ω? La fricción en los motores es ínfima y puede ser menospreciada y el campo magnético del estator es creado por un imán constante.

93. (10mo grado). La tapa de una caja cerrada cuya altura es $h = 1$ m está provista de un orificio circular. ¿Cómo variara la iluminación del fondo debajo del orificio, si en éste se enrosca una lente de 1 dioptría? La caja se halla a la intemperie y el cielo está cubierto por una capa uniforme de nubes.

Variante 2

94. (8vo grado). Se dispone de un interruptor, dos lámparas eléctricas en los zócalos de las cuales está escrito 75 W, 220 V y 15 W, 220 V y la tomacorriente bajo la tensión de 220 V. Componer el circuito que satisfaga las siguientes condiciones: cuando el interruptor se halla en la posición "conectado" luce sólo la lámpara de 75 W de potencia y si está situado en la posición "desconectado" esta lámpara se apaga, pero se enciende la lámpara de 15 W de potencia. Trazar el esquema de este circuito y explicar su funcionamiento.

95. (8vo grado). ¿Por qué es más fácil romper un cordel de papel mojado que el seco?

96. (8vo grado). Un sistema óptico proporciona la imagen real del objetivo. ¿Dónde hay que situar la lente con la distancia focal de 25 cm para que la imagen se vuelva imaginaria y cuatro veces más grande? Resolver el problema mediante el trazado.

97. (8vo grado). En un recipiente con agua flota una cazuela metálica que contiene cierta cantidad de agua. Una barra fijada como se muestra en la figura 22 toca la superficie de agua en la cazuela. En el recipiente se echa bastante lento el agua. ¿Cómo depende la distancia entre el fondo de la cazuela y el nivel de agua en el recipiente de la cantidad del agua vertida? Trazar el gráfico de esta dependencia.

98. (9no grado). Un triciclo sin freno, cuyos pedales están enlazados mediante una cadena con la rueda trasera, se halla situado sobre un piso plano. ¿A qué lado se desplazará el triciclo si se tira hacia adelante de una cuerda atada al pedal inferior del mismo? Explicar, ¿por qué?

99. (9no grado). Sobre un plano horizontal se encuentran dos iguales tubos de paredes finas con la masa m cada uno cuyos ejes son paralelos. Primero uno de los tubos se halla en reposo, mientras que el otro rueda hacia el inmóvil hasta chocar con él. La velocidad de movimiento de avance del tubo es igual a $\vec{v}$. ¿Cómo dependen del tiempo las velocidades

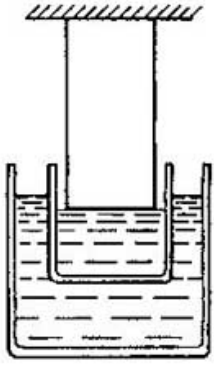


Fig. 22

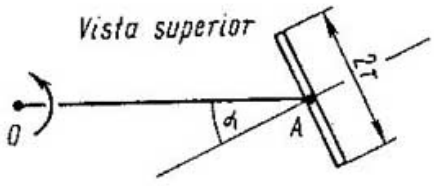


Fig. 23

de avance y angulares de rotación de los tubos? El coeficiente de rozamiento de resbalamiento de los tubos con la superficie horizontal es μ, la fricción entre los tubos durante la colisión puede ser menospreciada. La colisión ha de considerarse absolutamente elástica. Trazar el gráfico. El radio de los tubos es igual a R.

100. (9no grado). Una barra horizontal OA cuya longitud es l gira alrededor del eje vertical O (fig. 23). En un extremo de la barra está puesta una rueda con el radio r. El eje de la rueda es horizontal y forma el ángulo α con la barra OA. La rueda gira en el eje sin fricción y rueda por tierra. La fricción entre la rueda y el suelo es grande. ¿Cuántas vueltas da la rueda en una vuelta de la barra?

101. (9no grado). Un cosmonauta se encuentra a cierta distancia de la nave cósmica llevando consigo dos iguales pistolas de una carga. El cosmonauta puede disparar al mismo tiempo con ambas pistolas o por turno. ¿Cómo debe proceder para volver más rápido a la nave?

102. (9-10 grados). Una partícula pesada cuya masa es M choca con una partícula ligera en reposo cuya masa es m. ¿A qué ángulo máximo puede desviarse la partícula pesada a efecto de la colisión?

103. (10mo grado). En un refrigerador a través de las paredes en 1 h penetra el calor en la cantidad $Q = 7{,}6 \times 10^3$ J. La temperatura en el interior del refrigerador es $t_1 = +5$ °C, mientras que en la habitación es $t_2 = +20$ °C. ¿Qué potencia mínima debe consumir el refrigerador a partir de la red?

104. (10mo grado). Hay cuatro espirales de alambre fino, cada una de las cuales está calculada para una potencia no superior a 2 W. Las resistencias de espirales son de 10, 20, 30 y 40 Ohms. ¿Cómo se puede, valiéndose de estos espirales, componer un calentador, en el cual un manantial con la f.e.m. $\mathcal{E} = 20$ V y la resistencia interna $r = 25$ Ohms va a desarrollar la potencia máxima?

105. (10mo grado). El objetivo proporciona en el plano focal una imagen real del Sol. ¿Se puede hallar tal posición de la lente divergente, cuya potencia es de 1 dioptría, con la cual la imagen del Sol, permaneciendo real, sería 3 veces más grande que en ausencia de la lente divergente?

106. (10mo grado). Los pedales del triciclo están enlazados con la rueda trasera mediante una cadena. ¿En qué dirección rodará el triciclo si se tira hacia adelante de una cuerda atada al pedal inferior del mismo? ¿En que dirección rodará el triciclo si lo monta un chico y con la punta del zapato empuja el pedal inferior hacia adelante? Explicar, ¿por qué?

RONDA EXPERIMENTAL

107. (8vo grado). Delante de Ud. se encuentra una "caja negra" con dos terminales. Ud. dispone de manantiales de corriente continua y

alterna de hasta 20 V, así como de una bombilla eléctrica para 6,3 V. ¿Qué está en la "caja negra"?

Nota. En la caja se encuentra un condensador (fig. 24).

108. (8vo grado). Delante de Ud. se halla una "caja negra" con cuatro terminales, así como una pila de linterna y el voltímetro con la escala de hasta 6 V. ¿Qué está en la "caja negra"?

Nota. En la caja se encuentra el circuito cuyo esquema se muestra en la figura 25.

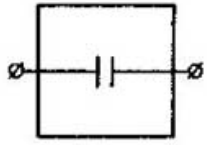


Fig. 24

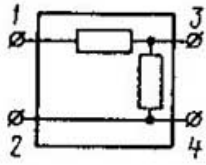


Fig. 25

109. (8vo grado). Determinar el número de espiras de los devanados del transformador desarmable escolar. Proponer el equipo a su parecer.

110. Determinar la masa de la carga con ayuda de una balanza de brazos desiguales si la masa de cada uno de los platillos de la balanza es conocida.

Aparatos y materiales: una balanza de brazos desiguales y un juego de pesas.

111. (9no grado). Determinar el calor específico de la sustancia del calorímetro.

Aparatos y materiales: un calorímetro, un termómetro, una probeta graduada, un recipiente con agua y un calentador.

112. (9no grado). Determinar el coeficiente del rozamiento de resbalamiento de madera por madera.

Aparatos y materiales: una tabla, una barra de madera y un dinamómetro.

113. (9no grado). Determinar la velocidad con la que el proyectil sale disparado de la pistola de resorte.

Aparatos y materiales: pistola de resorte, regla, bolitas-proyectiles para la pistola.

114. (9no grado). Determinar la tensión superficial del líquido.

Aparatos y materiales: recipiente con líquido, muelle sensible, anillo de alambre, regla y pesas de masas conocidas.

115. (10mo grado). Por vía de experimento hallar la dependencia entre la corriente que funde al conductor y el diámetro del mismo.

Aparatos y materiales: manantial de corriente regulable, juego de conductores, amperímetro, micrómetro.

116 (10mo grado). Determinar el coeficiente de temperatura de la presión del aire.

Aparatos y materiales: termómetro de gas, baño de María, termómetro de mercurio.

117. (10mo grado). Determinar el Faraday.

Aparatos y materiales: amperímetro, manantial de corriente, reóstato, cronómetro, balanza, baño electrolítico, solución de sulfato cúprico ($CuSO_4$).

118. (10mo grado). Con asistencia de un microscopio apreciar el índice de refracción del cristal.

Aparatos y materiales: microscopio, juego de cristales.

IV OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1970, Sverdlovsk)

RONDA TEORICA

119. (8vo grado). Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba. ¿Qué es mayor: el tiempo de subida o el tiempo de caída?

120. (8vo grado). En un recipiente hay dos líquidos inmiscibles con densidades ρ_1 y ρ_2; los espesores de las capas de estos líquidos son iguales a d_1 y d_2, respectivamente. Desde la superficie del líquido al recipiente se baja un pequeño cuerpo de forma fuselada, el cual alcanza el fondo justamente en el momento, cuando su velocidad llega a ser igual al cero. ¿Cuál es la densidad del material del que está hecho el cuerpo?

121. (8vo grado). ¿Cuál de las aristas del cubo de alambre debe ser retirada para que la resistencia entre los puntos A y B (fig. 26) varíe de manera más notable? Las resistencias de todas las aristas del cubo son iguales.

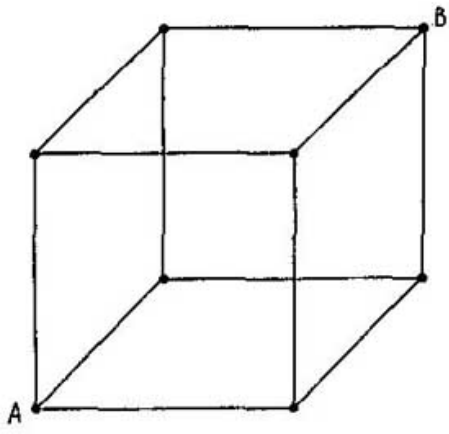


Fig. 26

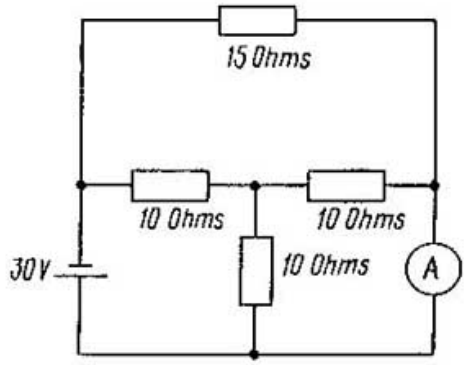


Fig. 27

122. (8vo grado). En un espejo plano se observa la imagen de una candela. ¿Qué ocurrirá con esta imagen si entre el espejo y la candela se coloca una placa plano-paralela?

123. (8–9 grados). ¿Qué acusará el amperimeto conectado en el circuito reproducido en la figura 27? La resistencia del amperímetro es menospreciablemente pequeña.

124. Dos bolitas iguales enlazadas por un muelle se mueven por el piso horizontal con una velocidad igual y perpendicular a la pared vertical. Describir, ¿cómo se produce la colisión del sistema con la pared? ¿Cómo van a moverse las bolitas después de la colisión? El choque de la bolita contra la pared es absolutamente elástico, el tiempo de la colisión es menospreciablemente breve en comparación con el período de oscilaciones de las bolitas en el muelle.

125. (9no grado). Apreciar, ¿a qué altura subirá la flecha tirada con el arco verticalmente hacia arriba? La masa de la flecha es $m = 20$ g y el largo de la cuerda es $l = 1$ m. La cuerda es estirada a $h_0 = 5$ cm. La fuerza elástica de tensado de la cuerda se considera constante e igual a 250 H.

126. (9–10 grados). ¿Por qué la bandera es ondeada con el viento?

127. (9–10 grados). Un tubo en U está lleno de agua. De un caño del tubo el aire es retirado; la presión de aire en otro caño a la temperatura $t = 20$ °C es igual a la atmosférica. Ambos extremos del tubo están soldados. La diferencia entre los niveles de agua en los caños es $h = 15$ m. ¿Cuál será la diferencia de los niveles de agua en los caños si el tubo es calentado hasta 100 °C?

128. (10mo grado). En el campo magnético de gran altura cae un anillo cuyo diámetro es d y la resistencia es R. El plano del anillo es todo el tiempo horizontal. Hallar la velocidad estacionaria de caída del anillo si el módulo de inducción $\vec{B}$ del campo magnético varía con la altura H según la ley $|\vec{B}| = B_0 (1 + \alpha H)$.

129. (10mo grado). En el arbol del inducido de una dinamo enrollaron la cuerda a la cual fijaron una carga. Bajando la carga daba vueltas al inducido. Una vez haciendo girar el inducido, a los bornes de la dinamo fue acoplada la resistencia de carga. Representar en el gráfico la relación entre la velocidad de rotación del inducido y el tiempo transcurrido a partir del momento inicial de movimiento de la carga.

130. (10mo grado). Sobre una mesa horizontal lisa se hallan dos cubos iguales con la masa m cada uno. Los cubos están enlazados por un muelle cuya rigidez es k. El largo del muelle no extendido es l_0 (fig. 28). En el cubo izquierdo de súbito comienza a actuar la fuerza $\vec{F}$ constante en módulo y dirección. Hallar las distancias mínima y máxima entre los cubos durante el movimiento del sistema.

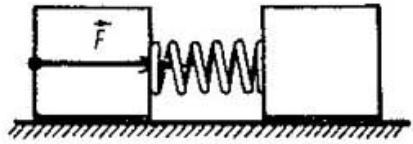


Fig. 28

131. (10mo grado). Fotografiar al tigre a la distancia menor de 20 m es peligroso. ¿Qué tamaño puede tener la cámara obscura con el orificio de 1 mm de diámetro para que el tigre en la foto salga rayado? El espacio entre las fajas de la piel del tigre debe ser de 20 cm.

RONDA EXPERIMENTAL

132. (8vo grado). Determinar la resistencia de la bombilla eléctrica de la linterna de bolsillo.

Aparatos y materiales: pila, bombilla, amperímetro, voltímetro, reóstato, conductores de conexión.

133. (8vo grado). Determinar la densidad de un líquido desconocido.

Aparatos y materiales: líquido a analizar, probeta graduada, líquido con densidad conocida, dinamómetro.

134. (8vo grado). Determinar la resistencia del reóstato.

Aparatos y materiales: manantial de corriente (pila), voltímetro, resistor con resistencia conocida, conductores de conexión.

135. (8vo grado). Con ayuda del dinamómetro determinar la masa del cuerpo cuyo peso es superior al límite de medición del dinamómetro, pero no más que dos veces.

Aparatos y materiales: dinamómetro, cubo, hilo.

136. (9no grado). Determinar el calor específico de la vaporización de agua.

Aparatos y materiales: hornillo eléctrico, recipiente con agua, reloj, termómetro. El calor específico de agua se considera conocido.

137. (9no grado). Determinar el calor específico de disolución de la sal común (NaCl).

Aparatos y materiales: balanza, termómetro, calorímetro, recipiente con agua, sal común.

138. (9no grado). Determinar el calor específico de fusión de la naftalina. El calor específico de la naftalina es c = 1,3 kJ (kg · K).

Aparatos y materiales: lata con naftalina, termómetro, cronómetro, hornillo eléctrico.

139. (10mo grado). Determinar la constante universal de los gases valiéndose del siguiente equipo: manómetro, matraz de volumen conocido, balanza, barómetro, bomba de vacío preliminar que saca el aire hasta la presión de 10 mm Hg. La masa molecular relativa del aire es igual a 29.

140. (10mo grado). Obtener el gráfico de dependencia entre la resistencia del termistor y la temperatura.

Aparatos y materiales: termistor, recipiente con agua, hornillo eléctrico, manantial de corriente, voltímetro, amperímetro, termómetro.

141. (10mo grado). Determinar la inductancia de la bobina del transformador escolar.

Aparatos y materiales: transformador escolar desarmable, manantial de tensión alterna (para 36 V), miliamperímetro y voltímetro de corriente alterna, conductores, reóstato.

V OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1971, Novosibirsk)

RONDA TEORICA

142. (8vo grado). En una vasija hermética con agua flota un pedazo de hielo con la masa M = 0,1 kg, en el cual se halla apresionado un perdigón cuya masa es m = 5 g. ¿Qué cantidad de calor es preciso gastar para que el perdigón comience a hundirse? La densidad de plomo es de 11,3 g/cm^3; la densidad de hielo, 0,9 g/cm^3; el calor de fusión de hielo, $3{,}3 \cdot 10^5$ J/kg. La temperatura de agua en la vasija es igual a 0 °C.

143. (8vo grado). A un cajón con dos bornes está conectado: un amperímetro, un resistor con la resistencia r = 4 Ohms y un manantial de tensión continua U_1 = 5 V (fig. 29). El amperímetro acusó la intensidad de corriente I_1 = 1 A. Cuando en lugar del manantial de tensión U_1 fue conectado otro manantial de tensión U_2 = 20 V, el amperímetro indicó la intensidad de corriente I_2 = 2A. ¿Qué se halla en el interior del cajón?

144. (8vo grado). Sobre una mesa lisa está situado un sistema de cargas reproducido en la figura 30. El coeficiente de rozamiento entre

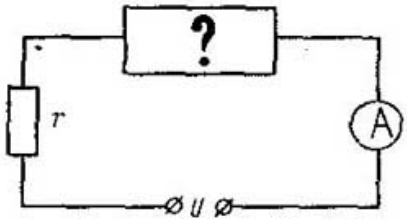


Fig. 29

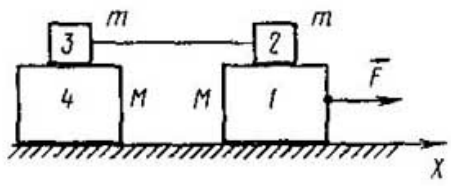


Fig. 30

las cargas M y m es igual a μ. La carga inferior derecha (según la figura) es arrastrada a lo largo de la mesa con la fuerza F, como se muestra en la figura 30. Hallar la aceleración de todas las cargas del sistema.

145. (8vo grado). Corriendo por la pista de hielo el patinador trata de pasar el viraje lo más cerca posible al borde interior. En cuanto al ciclista en el velódromo éste pasa el viraje lo más lejos posible del borde interior. ¿Cómo se explica esta diferencia en el movimiento del patinador y del ciclista en el viraje? El perfil del velódromo se muestra en la figura 31.

146. (8vo grado). Apreciar la fuerza máxima que acusará el dinamómetro fijado entre los planos que tapan los "hemisferios de Magdeburgo" de la semiesfera con el radio R = 20 cm (fig. 32). Las semiesferas son estiradas en direcciones opuestas. La presión atmosférica es igual a 10^5 Pa.

Fig. 31

Fig. 32

147. (8vo grado). En el vaso con agua, que gira alrededor de su eje, es lanzada una bolita que flota a flor de agua (fig. 33). ¿En qué parte de la superficie estará situada la bolita?

148. (9no grado). La luz emanada por el manantial S por dos vías llega a la pantalla pasando a través de los prismas rectangulares de vidrio A y B (fig. 34). El largo de cada una de las prismas es l. La velocidad de luz en el aire es igual a c. El índice de refracción de vidrio es n. ¿En cuánto más rápido recorrerá la luz por la vía inferior si el prisma B es puesto en movimiento hacia la pantalla con la velocidad v?

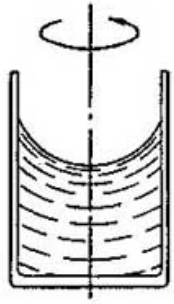


Fig. 33

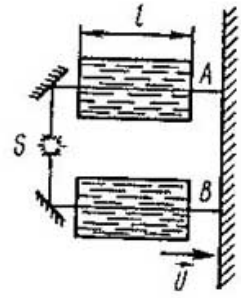


Fig. 34

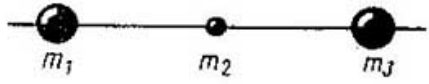


Fig. 35

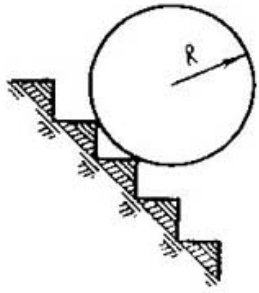


Fig. 36

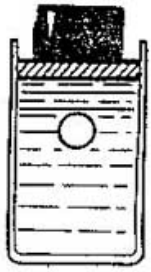


Fig. 37

149. (9no grado). Tres cuerpos cuyas masas son m_1, m_2 y m_3 pueden deslizar a lo largo de la recta horizontal sin rozamiento (fig. 35), siendo $m_1 \gg m_2$ y $m_3 \gg m_2$. Determinar las velocidades máximas de dos cuerpos extremos si en el momento inicial se hallaban en reposo, mientras que el cuerpo medio tenía la velocidad $\vec{v}$. Los choques se consideran absolutamente elásticos.

150. (9no grado). La bola, cuyo radio es R, resbala por la escalera, la anchura y la altura de los peldaños de la cual son $a \ll R$ (fig. 36). Las colisiones de la bola con los peldaños no son elásticas, la fricción no existe. ¿Qué velocidad máxima alcanzará la bola si es bastante larga la escalera?

151. (9no grado). En el cilindro con émbolo se halla agua en el interior de la cual en el momento inicial existe una cavidad con el volumen V (fig. 37). La presión de vapores en la cavidad es menospreciablemente pequeña. El émbolo ejerce sobre el agua una constante presión p.

¿Qué energía cinética adquiere el agua en el momento cuando la cavidad desaparece? La velocidad inicial de las partículas de agua es igual a cero. La fuerza de gravedad no se toma en consideración.

152. (9-10 grados). En la cámara de combustión del motor de reacción (fig. 38) entra por segundo la masa m de hidrógeno y la cantidad de oxígeno necesaria para que sea plena la combustión. El área de la sección del orificio de salida de la tobera del motor es S; la presión en esta sección, p; la temperatura absoluta, T. Determinar la fuerza de arrastre del motor.

153. (10mo grado). En la figura 39 se muestra una parte del circuito compuesto por resistores cuyas resistencias son desconocidas. ¿Cómo, disponiendo de amperímetro, voltímetro, manantial de corriente y conductores de conexión, se puede determinar la resistencia de uno de los resistores sin romper ningún contacto en el circuito?

154. (10mo grado). Al péndulo AB con la bolita de la masa M está suspendido el péndulo BC con la bolita de la masa m (fig. 40). El punto A ejecuta oscilaciones en dirección horizontal con el período T. Hallar la longitud del hilo BC si se conoce que el hilo AB permanece vertical.

155. (10mo grado). Dos protones y dos positrones, que se hallaban primero en reposo en las cúspides del cuadrado (fig. 41), se dispersan. La relación de sus masas es M/m = 2000, mientras que las cargas son iguales. Hallar la relación de las velocidades de los protones y de los positrones tras que se hayan dispersado (a la infinidad).

156. (10mo grado). La luz emanada por el manantial S por el camino a la pantalla atraviesa un prisma rectangular cuyo largo es l (fig. 42). ¿En

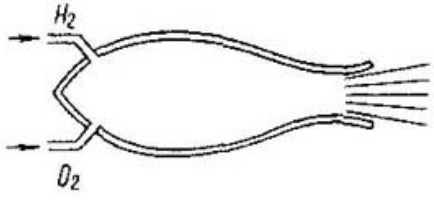


Fig. 38

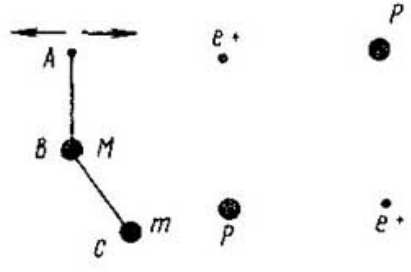


Fig. 40

Fig. 41

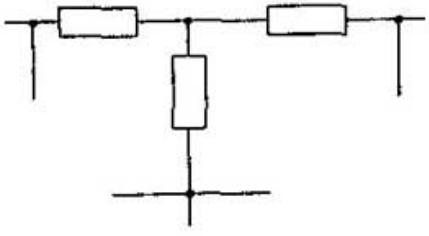


Fig. 39

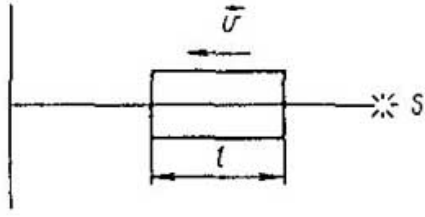


Fig. 42

cuánto más rápido llegará la luz a la pantalla si el prisma es puesto en movimiento hacia la pantalla con la velocidad $\vec{v}$? La velocidad de luz en el aire es c y el índice de refracción de vidrio, n.

RONDA EXPERIMENTAL

157. (8vo grado). En una caja cerrada se encuentra una bombilla eléctrica para la linterna de bolsillo y en la otra, un resistor. Determinar en qué caja se encuentra la bombilla.

Aparatos y materiales: manantial de corriente, dos cajas con terminales, reóstato, miliamperímetro, dos milivoltímetros, conductores de conexión.

158. (8vo grado). Determinar el rendimiento del plano inclinado.

Aparatos y materiales: regla de cálculo trigonométrico, barra de madera, regla de escalas gráficas, trípode.

159. (8vo grado). La masa de la bolita de acero es de 50 g. Hallar la masa de la bolita de cera de modelar y la pérdida de la energía mecánica en el caso del choque inelástico de las mismas.

Aparatos y materiales: bolitas de acero y de cera de modelar con el diámetro de 20 a 30 mm, hilos, trípode con vástago, transportador, regla de escalas gráficas, cera de modelar. La densidad de la cera de modelar es de 1,2 g/cm^3.

160. (8–9 grados). Determinar la relación del coeficiente de rozamiento en reposo al coeficiente de rozamiento de deslizamiento de madera contra madera.

Aparatos y materiales: barra de madera, 2 o 3 varillas redondas de madera, cronómetro, regla de escalas gráficas.

161. (9no grado). Determinar la densidad de un líquido desconocido.

Aparatos y materiales: dos vasijas con un mismo líquido, tubo de vidrio de 80–100 cm de largo, regla de escalas gráficas, tubo de goma, embudo.

162. (9–10 grados). Determinar el porcentaje de nieve en el agua al iniciar el ensayo.

Aparatos y materiales: calorímetro, termómetro, probeta graduada, vasija con agua de temperatura ambiente, mezcla de nieve con agua, cuerpo calorimétrico.

163. (9–10 grados). Determinar la dependencia entre el período de oscilaciones del péndulo físico y la posición del punto de su suspensión.

Aparatos y materiales: péndulo físico (regla provista de un orificio para ser suspendida), péndulo físico (regla provista de varios orificios), trípode con vástago (eje del péndulo), regla de escalas gráficas.

164. (10mo grado). Hallar el índice de refracción de la sustancia de la placa planoparalela respecto al aire.

Aparatos y materiales: placa planoparalela (transparente), hoja limpia de papel, compás de delineante, regla sin divisiones.

165. (10mo grado). Determinar la FEM del manantial de corriente desconocido, así como su resistencia interna.

Aparatos y materiales: manantial de corriente con la FEM desconocida, manantial de corriente con la FEM conocida, dos condensadores de capacidad igual, microamperímetro, resistor con la resistencia de 1 Ohm.

VI OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1972, Tbilisi)

RONDA TEORICA

166. (8–9 grados). Un lápiz hexagonal fue empujado a lo largo del plano horizontal según se muestra en la figura 43. ¿Con cuáles valores del coeficiente de rozamiento μ entre el lápiz y el plano el lápiz deslizará por el plano sin rodar?

167. (8–9 grados). El cubo de espuma sintética cuya masa es $M = 100$ g se halla situado sobre el soporte horizontal (fig. 44). El alto del cubo es $h = 10$ cm. De abajo el cubo es perforado por una bala que vuela verticalmente y cuya masa es $m = 10$ g.

La velocidad de la bala a la entrada en el cubo es $v_1 = 100$ m/s, a la salida $v_2 = 95$ m/s. ¿Saltará o no el cubo?

168. (8–9 grados). En la caja (fig. 45, a) está armado cierto circuito eléctrico y están hechos dos pares de terminales: "entrada" y "salida". A

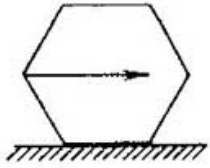
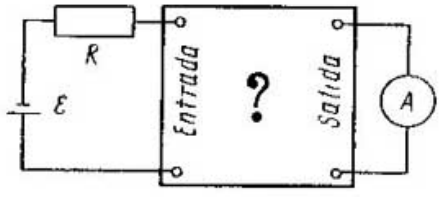


Fig. 43



a

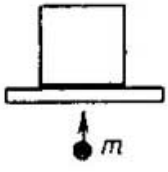
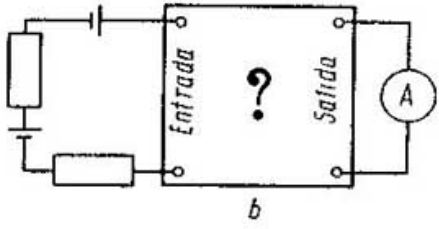


Fig. 44



b

Fig. 45

los bornes "salida" está conectado un amperímetro ideal (su resistencia es igual a cero). A los bornes "entrada" se conecta a través del resistor, cuya resistencia es R = 1 Ohm, una pila con la FEM $\mathcal{E}$ = 4 V. Con ello a través del amperímetro fluye la corriente I_1 = 1 A. Si a los bornes "entrada" se conecta un circuito constituido por dos tales pilas y dos tales resistores (fig. 45, b), por el amperímetro fluye la corriente I_2 = 2 A. Dibujar el esquema de algún circuito, sencillo en lo posible, encerrado en la caja.

169. (9no grado). A un dinamómetro está aplicada la fuerza de 4 H de modo que él se mueve con aceleración constante por la mesa horizontal. ¿Qué indica el dinamómetro si la masa del muelle es igual a la masa del cuerpo?

170. (8–9 grados). Sobre la mesa horizontal lisa está colocada verticalmente una pesita compuesta de una barra imponderable con dos bolitas iguales en sus extremos (fig. 46). Mediante un golpe a la bolita superior se le comunica la velocidad v en dirección horizontal. ¿Con qué longitud mínima l de la pesita la bolita inferior se separará inmediatamente de la mesa?

171. (9no grado). En el cilindro dispuesto horizontalmente (fig. 47) a la izquierda del émbolo fijado se halla 1 mol de un gas ideal. En la parte derecha del cilindro reina el vacío, mientras que el muelle situado entre el émbolo y la pared del cilindro se halla en el estado no deformado. El cilindro está termoaislado del medio ambiente. Cuando el émbolo fue liberado, el volumen ocupado por el gas aumentó dos veces. ¿Cómo variará la temperatura del gas y su presión? Las capacidades caloríficas del cilindro, del émbolo y del muelle son menospreciablemente pequeñas.

Fig. 46

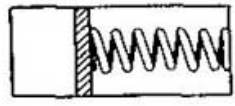


Fig. 47

172. (9no grado). Para la comunicación cósmica de gran alcance se emplea el satélite, cuyo volumen es V = 1000 m^3, lleno de aire que se halla en condiciones normales. Un meteorito perfora en el casco del satélite un orificio cuya superficie es S = 1 cm^2. Apreciar el tiempo al cabo del cual la presión dentro del satélite variará en 1 %. La temperatura de gas se considera invariable.

173. (9no grado). A la salida de la "caja negra" está conectado un amperímetro ideal. Si a la entrada de la misma está acoplada la pila con

la FEM $\mathcal{E}$ y la resistencia interna R, la intensidad de corriente, que fluye por el amperímetro, es justamente dos veces menor que en el caso, cuando a la entrada de la caja están acopladas dos tales pilas conectadas en serie. Trazar el esquema más sencillo posible del circuito encerrado en la "caja negra".

174. (9no grado). En el plasma homogéneo con la concentración de cargas n (número de cargas de cada signo en una unidad de volumen) todos los electrones, que se hallaban primero en una capa con el espesor d, se desplazan por la normal respecto a esta capa a la distancia d.

Hallar la intensidad del campo eléctrico en los puntos del plano S (fig. 48).

175. (10mo grado). Determinar, ¿cuántas veces variará la luminosidad de la imagen del Sol obtenida con ayuda de una lente planoconvexa si la lente es cortada por el diámetro y puesta con sus lados planos para adentro?

176. (10mo grado). En el cilindro dispuesto horizontalmente (fig. 47) a la izquierda del émbolo fijado se halla un gas ideal. En la parte derecha del cilindro reina el vacío y el muelle que enlaza el émbolo con la pared no está deformado. El cilindro está termoaislado del medio ambiente. Cuando el émbolo fue liberado, el volumen ocupado por el gas aumentó dos veces. ¿Cómo varió la temperatura del gas? Las capacidades caloríficas del cilindro y del émbolo pueden ser menospreciadas. El factor de proporcionalidad entre la temperatura y la energía interna del gas es igual a casi que $U = cT$.

177. (10mo grado). Con arreglo a uno de los primeros modelos (modelo de Tomson), el átomo de hidrógeno es un globo uniformemente cargado con electricidad positiva, en el centro del cual se encuentra un electrón. En total el átomo es neutro. Hallar el radio de tal átomo si es sabido que la energía mínima, que hay que comunicar al electrón para arrancarlo del átomo a distancia grande, es igual a W_i. La carga del electrón es e.

Indicación. Tomar en consideración que la capa esférica uniformemente cargada no crea campo eléctrico en su cavidad interior.

178. (10mo grado). Una varilla conductora está suspendida horizontalmente en dos cables ligeros dispuestos en el campo magnético cuya inducción está dirigida verticalmente hacia abajo y por el módulo es igual a B = 1 Tl (fig. 49). La longitud de la varilla es $l = 0{,}2$ m; la masa, $m = 10$ g; el largo de los cables, $l_1 = 0{,}1$ m. A los puntos de fijación de los cables se conecta un condensador de capacidad $c = 100$ μF cargado hasta la tensión de $U = 100$ V. Determinar: a) el ángulo máximo de desviación del sistema de la posición de equilibrio después de descargarse el condensador, adoptando que la descarga se efectúa en tiempo breve; b) la capacidad C_1 del condensador, al descargarse el cual el sistema se desviará en el angulo $\alpha = 3°$, si, al descargarse el cargado hasta tal tensión condensador de capacidad $C_0 = 10$ μF, el ángulo de desviación $\beta = 2°$.

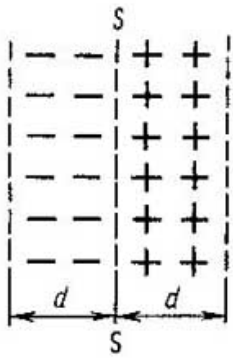


Fig. 48

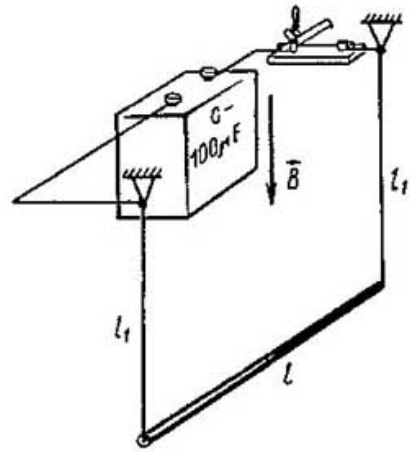


Fig. 49

179. (10mo grado). Hay dos bobinas dispuestas coaxialmente. En una de las bobinas la intensidad de corriente creada por el manantial externo varía en tiempo como se muestra en la figura 50. La segunda bobina está cortocircuitada. Representar en el gráfico la dependencia entre la intensidad de corriente en la segunda bobina y el tiempo.

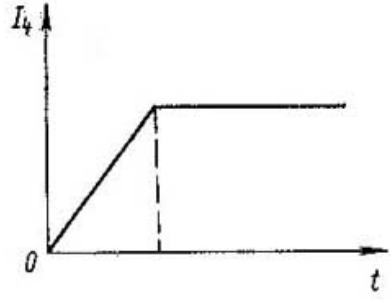


Fig. 50

RONDA EXPERIMENTAL

180. (8vo grado). Determinar la aceleración de caída.

Aparatos y materiales: polea fija, dos cargas, balanza, juego de pesas, cronómetro, hilo.

181. (8vo grado). Determinar en el ensayo la dependencia entre el período de las vibraciones torsionales del disco (fig. 51) y su radio y masa.

Aparatos y materiales: cronómetro, balanza, juego de pesas, juego de discos.

182. (8vo grado). Construir el gráfico de dependencia entre la fuerza de elasticidad del cordón de goma y su alargamiento.

Aparatos y materiales: cordón de goma, pesa (de masa desconocida), regla.

183. (8-9 grados). Determinar el calor de fusión del hielo.

Aparatos y materiales: termómetro, agua, hielo, probeta graduada.

184. (9no grado). Determinar la relación entre la resistencia que obra sobre la bola que se mueve en el medio viscoso y las dimensiones de ésta. Es sabido que la fuerza de resistencia es directamente proporcional a la velocidad de movimiento de la bola en el medio viscoso.

Aparatos y materiales: tubo con glicerina, juego de bolas de densidad igual, cronómetro, compás de varas.

185. (9no grado). Determinar la capacidad eléctrica del condensador por el método de su carga o descarga.

Aparatos y materiales: condensador de capacidad grande, microamperímetro, resistor de resistencia conocida, manantial de corriente continua, cronómetro, llave, conductores.

186. (9no grado). Determinar la relación entre la potencia útil y la intensidad de corriente en el circuito; determinar la FEM y la resistencia interna del manantial de corriente continua.

Aparatos y materiales: manantial de corriente continua, amperímetro, voltímetro, reóstato, llave, conductores.

187. (9-10 grados). Determinar la permitividad del dieléctrico (papel aceitado).

Aparatos y materiales: papel aceitado entre dos capas de hoja metálica, voltímetro para 300 V, miliamperímetro (con resistencia interna menospreciablemente pequeña), regla, micrómetro, tubo de cristal, manantial de tensión (red de 220 V), llave, conductores.

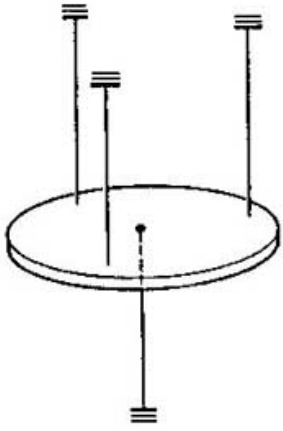


Fig. 51

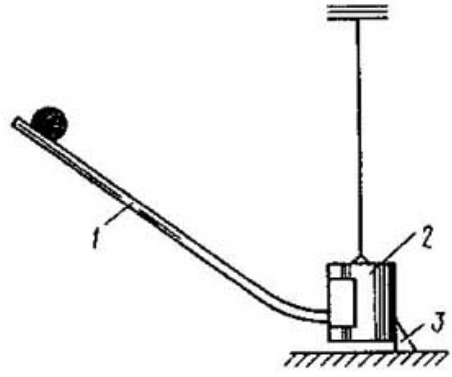


Fig. 52

188. (10mo grado). Determinar el valor amplitudinal de la intensidad de corriente alterna.

Aparatos y materiales: manantial de corriente alterna de baja tensión, calorímetro, tapa del calorímetro con bornes, mezclador, conductor de fecral, balanza con juego de pesas, probeta graduada, termómetro, conductores, cronómetro, regla, micrómetro, alicates de bocas planas, tubo de cristal, llave.

189. (10mo grado). Medir los períodos de las vibraciones torsionales de los discos de diferente espesor y radio. Aclarar las magnitudes cuya igualdad determina la igualdad de los períodos de vibraciones.

Aparatos y materiales: suspensión (fig. 51), cronómetro, juego de discos de distinto tamaño e igual masa.

190. (10mo grado). Determinar la inducción del campo magnético de imán permanente.

Aparatos y materiales: imán, galvanómetro, manantial de corriente, bobina con el número de espiras n = 1200 y baja resistencia, aguja imantada.

191. (10mo grado). Determinar la dependencia entre la inducción de campo magnético de corriente rectilínea y la intensidad de corriente y la distancia hasta la última. La componente horizontal de la inducción de campo magnético de la Tierra es igual a $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ Tl.

Aparatos y materiales: aguja imantada, cuadro grande de alambre, manantial de corriente, reóstato, voltímetro, regla.

192. (10mo grado). Determinar las pérdidas de energía por el cuerpo en movimiento al chocar éste con un péndulo balístico (fig. 52).

Aparatos y materiales: canalón (1), juego de cubos, péndulo balístico (2), tope desplazable (3).

VII OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1973, Leningrado)

RONDA TEORICA

193. (8vo grado). Al modelo de buque mediante un empuje le comunicaron la velocidad v = 10 m/s. Durante el movimiento del modelo en el mismo actúa la fuerza de resistencia cuyo módulo es proporcional a la velocidad: F = -kv. Hallar: a) el camino recorrido por el modelo en el tiempo, en el curso del cual la velocidad del mismo disminuyó dos veces; b) el camino recorrido por el modelo hasta que se detuvo por completo. Considerar que k = 0,5 kg/s. La masa del modelo es m = 0,5 kg.

194. (8vo grado). Por la plancha de madera, que forma el ángulo α con el horizonte, tirando de la cuerda de manera uniforme, se arrastra un cajón. El coeficiente de rozamiento del cajón con la plancha es μ. ¿Bajo qué ángulo al horizonte es preciso dirigir la cuerda para arrastrar el cajón aplicando el mínimo esfuerzo?

195. (8vo grado). Sobre un extremo de la tabla con el largo L y la masa M se encuentra una barra corta con la masa m (fig. 53). La tabla puede deslizar sin fricción por el plano horizontal. El coeficiente de rozamiento de deslizamiento de la barra por la superficie de la tabla es igual a μ. ¿Qué velocidad v debe ser comunicada a empuje a la tabla para que ésta escurra de debajo de la barra?

196. (8vo grado). Para conectar la bombilla en la red, cuya tensión es superior a la que ésta está calculada, se puede valerse de uno de los circuitos reproducidos en la figura 54. ¿Cuál de estos circuitos tiene mayor rendimiento si en ambos casos la bombilla luce en el régimen normal?

197. (8–9 grados). A una arandela homogénea fina dispuesta sobre una superficie áspera horizontal se le comunica el movimiento giratorio con a velocidad angular ω y el de avance con la velocidad $\vec{v}_0$ (fig. 55). ¿Cuál es la trayectoria de movimiento del centro de la arandela? ¿En qué caso la arandela recorrerá mayor camino hasta la detención: con $\omega_0 = 0$ o con $\omega_0 \neq 0$ ($\vec{v}_0$ es igual en ambos casos)?

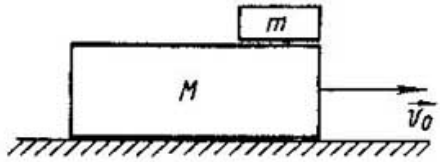


Fig. 53

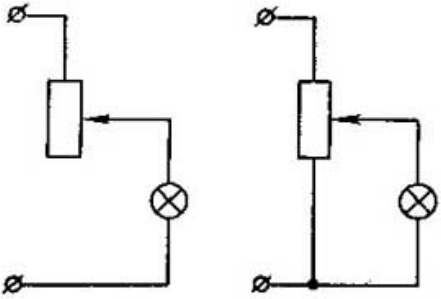


Fig. 54

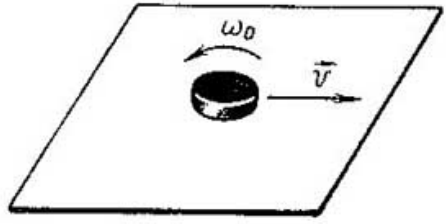


Fig. 55

198. (9no grado). Para medir la distancia que recorre el trineo, fue utilizada la rueda de bicicleta con el largo de la circunferencia de 1 m dispuesta detrás del trineo y enlazada con el contador de revoluciones. Al reparar este dispositivo a la llanta de la rueda fue necesario fijar un peso adicional de pequeño tamaño con la masa m = 30 g. ¿A qué velocidad de movimiento del trineo la rueda comenzará a saltar? La masa de la rueda es M = 450 g.

199. (9no grado). Una bola metálica cargada de radio R está cortada en dos partes por el plano que está a la distancia h del centro (fig. 56). Hallar la fuerza con que se repelen estas partes. La carga completa de la bola es Q.

200. (9no grado). Un diodo está conectado en el circuito reproducido en la figura 57. La característica idealizada de voltios-amperios del diodo se ofrece en la figura 58. El condensador previamente no está cargado. La llave K se cierra. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá en el resistor de resistencia R durante la carga del condensador? La capacidad del condensador es C. La FEM del manantial es $\mathcal{E}$. La resistencia interna del manantial es pequeña.

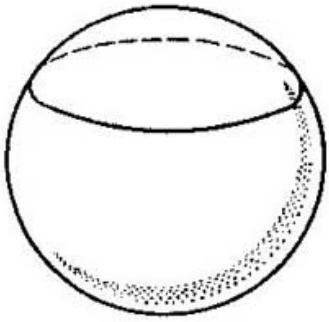


Fig. 56

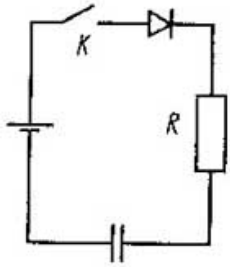


Fig. 57

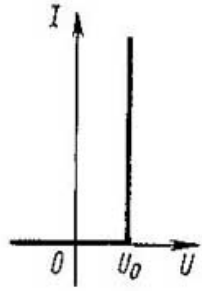


Fig. 58

201. (9–10 grados). En un vaso se hallan vertidos dos líquidos inmiscibles: el tetracloruro de carbono (CCl_4) y el agua. A la presión atmosférica normal el tetracloruro de carbono hierve a 76,7 °C, mientras que el agua a 100 °C. Con el calentamiento uniforme del vaso en el baño de María la ebullición en el límite divisorio de los líquidos comienza a la temperatura de 65,5 °C. Determinar, ¿cuál de los líquidos se evapora hirviendo más rápido en el caso de tal ebullición "limítrofe" y cuántas veces? La presión de los vapores saturados de agua a 65,5 °C es de 192 mm Hg.

202. (10mo grado). Contra el sistema constituido por dos bolitas de masa m cada una, enlazadas por un muelle que se halla en reposo sobre una superficie horizontal lisa, del lado izquierdo da una bolita de masa M (fig. 59). Con ello se produce un choque frontal absolutamente elástico.

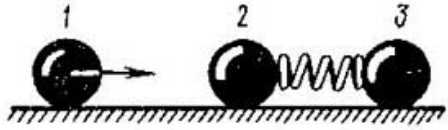


Fig. 59

Hallar de manera aproximada la relación de las masas $\frac{m}{M} = \nu$ con la cual el choque se producirá una vez más.

203. (10mo grado). Por la plancha de madera, que forma el ángulo α con el horizonte, tirando de la cuerda se arrastra un cajón. El coeficiente de rozamiento del cajón con la plancha es μ. ¿Bajo qué ángulo al horizonte es preciso dirigir la cuerda para arrastrar el cajón aplicando el mínimo esfuerzo: a) uniformemente, b) con la aceleración fijada $\vec{a}$?

204. (10mo grado). Un motor eléctrico de corriente continua con excitación independiente (o con imán permanente) eleva la carga con la velocidad v_1 con ayuda de un hilo que se enrolla en el árbol del motor. En ausencia de la carga el hilo imponderable se eleva con la velocidad v_0. ¿Con qué velocidad v_2 va a bajar la misma carga si en el circuito del inducido se produce el cortocircuito a efecto del cual el devanado del inducido resultará cortocircuitado? La fricción en los cojinetes puede ser menospreciada.

205. (10mo grado). En el núcleo toroidal de ferrita con permeabilidad magnética $\mu = 2000$ están enrolladas dos bobinas: primaria que comprende $n_1 = 2000$ espiras y secundaria que tiene $n_2 = 4000$ espiras. Cuando a la bobina primaria fue enviada la tensión $U_1 = 100$ V, en la secundaria abierta había $U_2 = 199{,}0$ V. Hallar, ¿qué tensión habrá en la bobina secundaria abierta si se usa otro núcleo del mismo tamaño, pero hecho de ferrita con $\mu = 20$? La dispersión del flujo magnético y las pérdidas en el núcleo no se toman en consideración.

RONDA EXPERIMENTAL

206. (8vo grado). Sobre su mesa está instalada una pistola balística que dispara bolas de acero. A su disposición Ud. tiene: regla para medir distancias, caja con arena, trozo de tiza y tablas trigonométricas. El ángulo bajo el cual se efectúa el disparo se mide con ayuda del angulómetro (transportador y plomada) enlazado con el cañón de la pistola.

Antes de ser colocado el blanco por el miembro del jurado, Ud. tiene derecho de disparar cualquier número de veces bajo cualquier ángulo al horizonte.

Determinar el lugar de impacto de la bola disparada con la pistola balística bajo el ángulo asignado de disparo y la altura asignada de disposición del blanco, después de que el miembro del jurado ajuste el ángulo bajo el que hace falta disparar y la altura del blanco sobre el piso. Ud. debe disponer el blanco en el lugar fijado, en presencia del miembro del jurado efectuar un solo disparo y dar en el blanco.

207. (9no grado). Medir el calor específico medio del aceite para transformadores en el margen de temperaturas de 45–50 °C o de 50–55 °C.

Aparatos y materiales: calorímetro (vaso picudo con aislación térmica de espuma sintética), termómetro con la escala de 0 a 50 °C,

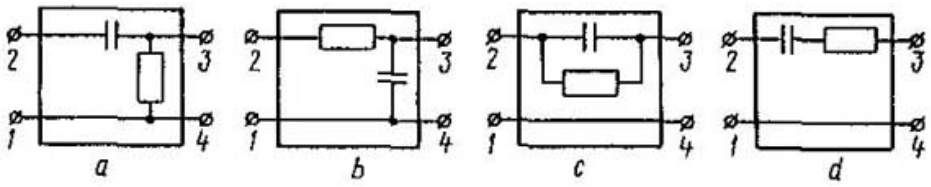


Fig. 60

callentador-mezclador eléctrico (la resistencia del calentador a la temperatura del ensayo es de 200 Ohms y la potencia admisible desprendida por el calentador en el líquido, 30 W), miliamperímetro, reóstato para 30 Ohms, 5 A, trípode de laboratorio, cronómetro, manantial de tensión continua de 50 V. La balanza de laboratorio, el aceite y el agua destilada se hallan sobre mesas aparte. Se puede hacer uso de los mismos con autorización de los miembros de guardia del jurado. La graduación de todos los instrumentos ha de considerarse ideal.

208. (10mo grado). Determinar, ¿cuál de los esquemas presentados (fig. 60) corresponde al circuito encerrado en la caja ofrecida a Ud? Determinar los parámetros de los elementos que integran el circuito.

Para solucionar el problema dado Ud. dispone del manantial de tensión alterna (generador acústico) capaz de generar la tensión sinusoidal con la frecuencia desde 20 Hz hasta 200 kHz y el voltímetro de válvula. El generador acústico está acoplado a los contactos 1 y 2 (fig. 60). El voltímetro de válvula puede acoplarse a los contactos 2 y 4 o 3 y 4. El circuito, armado antes de su llegada, se reproduce en la figura 61. Además, Ud. tiene en su disposición: tres resistores de resistencias diferentes que pueden ser conectados entre cualquier par de contactos.

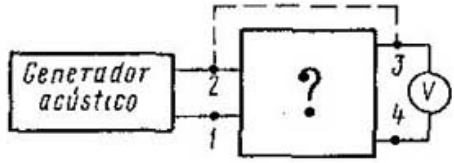


Fig. 61

VIII OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1974, Gorki)

RONDA TEORICA

209. (8vo grado). Por los lados del ángulo recto desliza un palito rígido de 2 l de largo, en el medio del cual se halla fijada una cuenta de vidrio de masa m. La velocidad del punto B es constante e igual a v

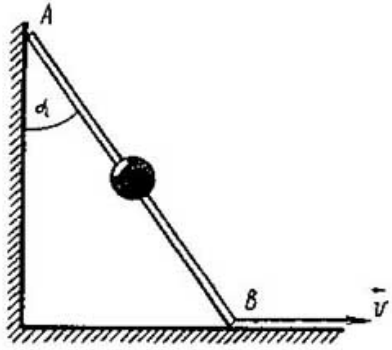


Fig. 62

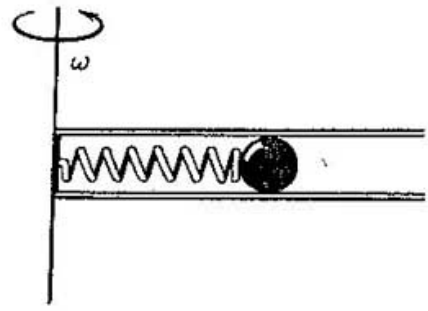


Fig. 63

(fig. 62). Determinar, ¿con qué fuerza actúa la cuenta de vidrio sobre el palito en el momento, cuando $\alpha = 45°$?

210. (8vo grado). El canal pasa por el puente sobre una carretera. ¿En qué caso la presión sobre el puente es más grande: cuándo por el canal se mueve una barcaza vacía o cargada?

211. (8–9 grados). El tubo, en el interior del cual se halla un muelle cuya longitud es $l_0 = 2$ cm con una bolita fijada al mismo, puede girar sobre el eje vertical que pasa por un extremo del tubo. El extremo libre del muelle está fijado al tubo (fig. 63). Trazar el gráfico aproximado de dependencia entre el desplazamiento de la bolita a lo largo del tubo y la velocidad angular al aumentar ésta del cero hasta el valor con el cual F = 5H. ¿Cómo variará esta dependencia al disminuir la valocidad angular? El gráfico de dependencia entre el módulo de la fuerza de elasticidad F y el alargamiento del muelle viene representado en la figura 64.

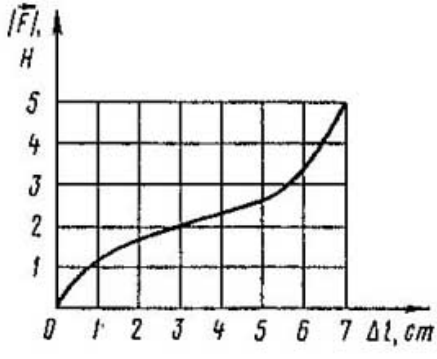


Fig. 64

212. (8-9 grados). En un local sin calefacción funciona un refrigerador provisto del termorregulador. En el momento de conectarse el refrigerador en la red las temperaturas en la calle, en el local y en el refrigerador eran iguales. Considerando constante la temperatura en la calle representar de manera aproximada en los gráficos cómo variaba la temperatura en el local tras conectarse el refrigerador. Analizar tres casos: 1) el refrigerador está vacío; 2) el refrigerador está lleno de víveres; 3) la puerta del refrigerador está abierta. Trazar los tres gráficos de dependencia entre la temperatura y el tiempo en un mismo dibujo.

213. (9no grado). El recipiente C comunica con el ambiente exterior por un pequeño orificio. La temperatura de gas en el medio ambiente es T, la presión p. El gas es tan rarificado que las moléculas, volando al recipiente y fuera del mismo a lo largo del orificio, no tropiezan una con otra. En el recipiente se mantiene la temperatura de 4T. ¿Cuál será la presión en el recipiente?

214. (9no grado). Unas bolitas cargadas de masa igual, dispuestas a la distancia l una de otra, fueron sueltas sin velocidad inicial. Dentro del tiempo t la distancia entre las mismas aumentó dos veces. ¿Dentro de qué tiempo se duplicará la distancia entre estas bolitas si son sueltas con la distancia inicial de 3 l?

215. (9no grado). Investigando las propiedades elásticas del alambre de acero de largo l establecieron que si un extremo del mismo es fijado y el otro virado al ángulo α alrededor del eje surge el momento de las fuerzas de elasticidad $M = k\alpha$. Después de ello, con el alambre es enrollado un resorte del radio R con el paso mucho menor que R. Determinar la rigidez del resorte considerando que las propiedades elásticas de acero se restablecen del todo después de enrollado el resorte.

216. (10mo grado). La foto (fig. 65) fue tomada con el objetivo de una lente cuya distancia focal es F = 4 cm. La fotografía fue aumentada 10 veces. Determinar de manera aproximada la distancia entre los objetos en tamaño natural; por ejemplo, la distancia l_0 entre el objetivo y la ventana, la distancia l entre la ventana y el puente, la altura h del objetivo sobre la peana.

217. (10mo grado). Dos automóviles A y B van cerca por la carretera con velocidades iguales equivalentes en el módulo a v. Luego el automóvil A aumenta su velocidad hasta 2 v. Respecto al observador, que estaba en la carretera, la energía cinética del automóvil creció en $\Delta W_1 = \frac{3}{2} mv^2$, mientras que respecto al chofer en el automóvil B la energía aumentó en $\Delta W_2 = \frac{1}{2} mv^2$. Explicar la paradoja: la cantidad del combustible quemado para ambos observadores es una misma, mientras que la variación de la energía, distinta. ¿Es igual el calor de combustión del combustible desde el punto de vista de cada uno de los observadores?

218. (10mo grado). Dos condensadores iguales A y B de capacidad C cada uno y una bobina de inductancia L están conectados como se

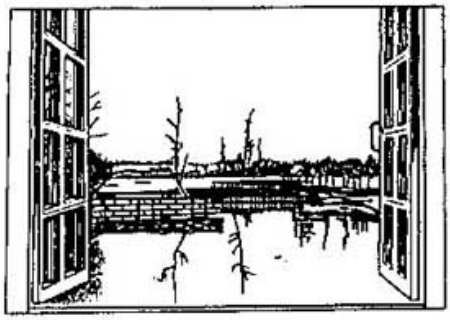


Fig. 65

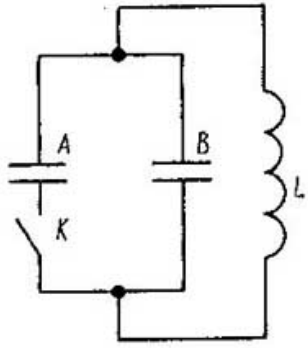


Fig. 66

muestra en la figura 66. En el momento inicial la llave K está abierta y el condensador A está cargado hasta la diferencia de potenciales U. El condensador B no está cargado y la corriente en la bobina no existe. Determinar el valor máximo de la intensidad de corriente en la bobina después de cerrarse la llave.

219. (10mo grado). Una placa metálica redonda cae verticalmente hacia abajo en el campo magnético homogéneo paralelo a la superficie de la Tierra. En el curso de la caída la misma permanece paralela a las líneas de inducción del campo magnético y perpendicular a la superficie de la Tierra. El espesor de la placa d es mucho menor que su radio R, su masa es igual a m, el módulo de inducción del campo magnético B y la aceleración de caída libre g. Determinar la aceleración con la que cae la placa.

220. (10mo grado). Desde un punto en el fondo del canalón anular horizontal se dispersan unas bolitas bajo pequeños ángulos a la generatriz del canalón con iguales proyecciones de la velocidad sobre la dirección de la generatriz. ¿Se encontrarán estas bolitas?

RONDA EXPERIMENTAL

221. (8vo grado). El período de oscilaciones T de la carga en el resorte depende de la masa m de la carga. Estudiar esta dependencia valiéndose de un resorte, un cronómetro y un juego de pesas con masas conocidas. Según los resultados del ensayo construir el gráfico. Tratar de escoger la fórmula que describe la dependencia obtenida entre T y m.

Con algunos valores de masa de la carga es fácil notar que las oscilaciones a lo largo del resorte son acompañadas por oscilaciones de péndulo. Estudiar este fenómeno y describir sus regularidades.

222. (9no grado). Estudiar la "caja negra" (cuadripolo eléctrico)

sobre la que se conoce que consta de cuatro bipolos conectados en estrella (o sea como se muestra en la figura 67).

Aparatos y materiales: pila, voltímetro y miliamperímetro, conductores.

Nota. En la "caja negra" se hallaba uno de los circuitos ofrecidos en la figura 68.

223. (10mo grado). ¿Qué ocurre con la imagen del objeto obtenida con ayuda de una lente convergente si se tapa una mitad de la lente con una pantalla opaca?

Contestar a esta pregunta y seguidamente verificar su respuesta con un experimento obteniendo en la pantalla blanca con ayuda de la lente la imagen de la flecha-objeto para dos diferentes valores de aumento de L: 1) $L > 3$; 2) $L < 1/3$.

Describir y explicar los resultados del experimento.

Con fines de comprobar estas explicaciones idear y realizar ensayos de control de calidad y cantidad utilizando para ello según su propio parecer cualquier elemento de la instalación: lente, flecha-objeto, farol, pantalla blanca, papel negro, reglas, tijeras.

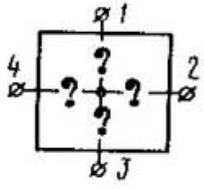


Fig. 67

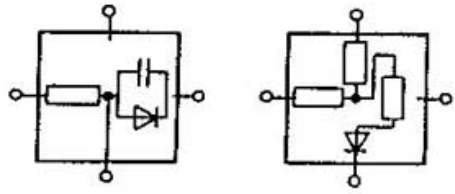


Fig. 68

Realizar investigaciones análogas para la imagen real que se observa sin pantalla y para la imagen virtual.

En calidad del objeto en estos ensayos es práctico utilizar el filamento de la lámpara.

En las observaciones sin pantalla es indispensable disponer entre el manantial de luz y el ojo una película que sirve del debilitador de la luz.

Aparatos y materiales: lente, farol, objeto, trípode, pantalla, debilitador, papel negro, regla, lámpara de sobremesa.

IX OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1975, Kaluga)

RONDA TEORICA

224. (8vo grado). El cohete está provisto de dos motores que pueden comunicarle aceleraciones constantes a_1 y a_2 dirigidas verticalmente

hacia arriba. El primer motor está calculado para funcionar durante el tiempo t_1 y el otro, durante el t_2, siendo $a_1 > a_2$ y $t_1 < t_2$. Los motores pueden ponerse en marcha tanto de una manera simultánea como consecutiva. ¿Qué orden de puesta en marcha de los motores debe ser seleccionado para que en el momento de dejar de funcionar los mismos el cohete se eleve a una altura máxima?

225. (8vo grado). Una nave cósmica se mueve por la órbita circular alrededor de la Tierra en el plano de la órbita de la Luna con la velocidad angular igual a la velocidad angular de rotación de la Luna en torno a la Tierra. En el curso del movimiento la nave se halla en la recta que enlaza los centros de la Luna y de la Tierra. La distancia entre la nave y la Tierra es tal que las fuerzas de atracción que obran sobre la nave par parte de la Tierra y la Luna son iguales entre sí. ¿Funcionan o no los motores de la nave? ¿Cuál es el peso del cosmonauta que se halla a bordo de la nave? La masa del cosmonauta es m = 70 kg, el período de rotación de la Luna alrededor de la Tierra es T = 27,3 días. La masa de la Tierra es 81 veces mayor que la de la Luna, mientras que la distancia L entre la Tierra y la Luna es aproximadamente igual a 60 radios de la Tierra. El radio de la Tierra R_T se toma igual a 6400 km.

226. (8vo grado). Para regular la tensión en la carga está montado el circuito que se muestra en la figura 69. Las resistencias de la carga y del devanado del potenciómetro son iguales y equivalen a R. La carga está acoplada a la mitad del devanado del potenciómetro. ¿Cómo hay que variar la posición del cursor del potenciómetro para que la tensión en la carga siga siendo la misma si la tensión U a la entrada del circuito aumenta dos veces?

227. (8vo grado). El ángulo bajo el cual se observa el Sol desde la Tierra (diámetro angular) es igual aproximadamente a $\alpha \approx 10^{-2}$ rad. El radio de la Tierra es $R_T = 6400$ km. Determinar la relación de las densidades medias de la Tierra y del Sol teniendo en cuenta que 1 año $\approx 3 \cdot 10^7$ s.

Nota. El volumen del globo se calcula por la fórmula $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ (en donde R es el radio del globo).

228. (8-9 grados). Apreciar la potencia del motor necesaria para mantener en el aire el helicóptero de masa m = 500 kg si las palas de la hélice son de 3 m de largo (l = 3 m).

Considerar que todo el aire debajo de las palas en rotación se mueve hacia abajo como un flujo homogéneo.

229. (9no grado). Un gas monoatómico ideal que se encuentra en condiciones normales pasa del estado 1 al estado 2 por dos métodos: 1 → 3 → 2 y 1 → 4 → 2 (fig. 70). Hallar la relación de las cantidades de calor necesarias para comunicar a 1 kmol de gas en estos dos procesos.

230. (9no grado). La carga Q está distribuida de manera uniforme por anillo dieléctrico fino dispuesto sobre un plano horizontal liso. La inducción del campo magnético perpendicular al plano de anillo varía de 0

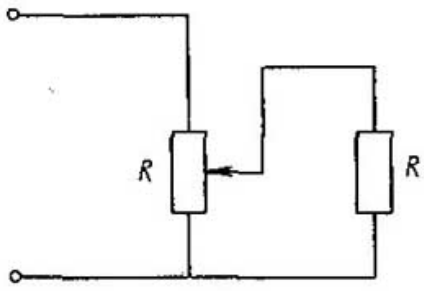


Fig. 69

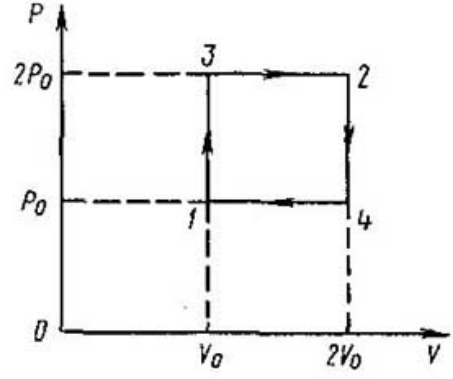


Fig. 70

hasta B_0. ¿Qué velocidad angular de rotación adquiere con ello el anillo? La masa del anillo es igual a m.

231. (9–10 grados). Hallar la dependencia entre la tensión en el resistor R del circuito cuyo esquema se muestra en la figura 71 y la resistencia de este resistor. La FEM de cada uno de los manantiales es igual a $\mathcal{E}$ y la resistencia interna, a r. El diodo se considera ideal (su resistencia en el sentido directo es igual a cero y en el inverso, infinitamente grande).

232. (9no grado). Una nave cósmica gira en torno a la Luna por la orbita circular de radio $R = 3{,}4 \cdot 10^6$ m. ¿Con qué velocidad debe ser lanzado desde la nave un gallardete por la tangente a la trayectoria de la nave para que caiga sobre el lado opuesto de la Luna? ¿Dentro de qué tiempo el gallardete caerá sobre la Luna? Adoptar que la aceleración de la caída libre de los cuerpos en la proximidad de la superficie de la Luna es 6 veces menor que en la Tierra.

El radio de la Luna se toma igual a $1{,}7 \cdot 10^6$ m.

233. (10mo grado). Una nave cósmica se aproxima a la Luna por la trayectoria parabólica que casi toca la superficie de la misma. Para pasar a la órbita circular rastrera, o sea a la órbita circular que se

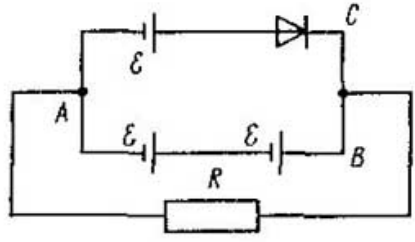


Fig. 71

acerca mucho a la superficie de la Luna, en el momento de la aproximación máxima a la Luna se pone en marcha el motor de frenado.

Determinar, ¿en cuánto variará la velocidad de movimiento de la nave al efectuarse esta maniobra? La aceleración de caída libre de los cuerpos sobre la superficie de la Luna es $g_L = 1{,}7$ m/s², el radio de la Luna $R_L = 1{,}7 \cdot 10^6$ m.

Pregunta complementaria. Tratar de apreciar, ¿qué parte de la masa inicial de la nave ha de constituir el combustible quemado si el motor de frenado expulsa los productos de combustión con la velocidad relativa $v = 4 \cdot 10^3$ m/s.

234. (10mo grado). Dos prismas hexagonales regulares ABCDEF y A'B'C'D'E'F' hechos de material transparente están pegados con las facetas ennegrecidas DE y D'E' (fig. 72). Las demás facetas están provistas del recubrimiento clarificador, o sea en las mismas no se produce la reflexión de la luz. La faceta AB es iluminada por un amplio haz paralelo de luz, paralelo al plano de la base del prisma. Con cierto valor del ángulo de caída todo el flujo luminoso que cae sobre la faceta AB sale por la faceta A'B' del otro prisma. Determinar el índice de refracción del material de los prismas.

235. (10mo grado). Una de las armaduras de un condensador plano de superficie S está suspendida en un muelle, mientras que la otra se halla fijada (fig. 73). La distancia entre las placas en el momento inicial es igual a l_0. Por un tiempo breve el condensador fue conectado a la batería y cargado hasta la tensión U. ¿Cuál debe ser la rigidez k del muelle para que las placas no se toquen a efecto de su atracción recíproca después de la carga?

El desplazamiento de la placa de condensador durante la carga puede ser menospreciado.

236. (10mo grado). En el caso del golpe débil del balón de fútbol contra la pared él se deforma como se muestra en la figura 74. Con ello la deformación x del balón es mucho menos de su radio y con buena aproximación se puede considerar que la presión p del aire en el balón en el curso del golpe no varía. Menospreciando la elasticidad de la

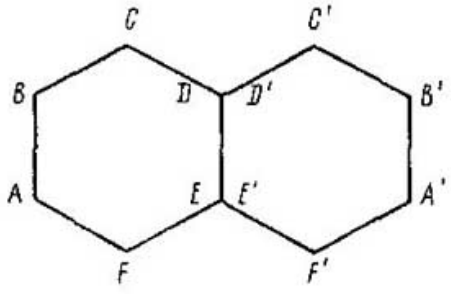


Fig. 72

Fig. 73

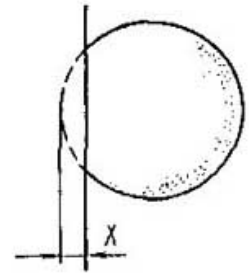


Fig. 74

cubierta apreciar el tiempo de colisión del balón con la pared. Efectuar el cálculo digital de este tiempo para el caso cuando la masa del balón es m = 0,5 kg, la presión en el mismo p = $2 \cdot 10^5$ Pa y el radio del balón R = 12,5 cm.

RONDA EXPERIEMNTAL

237. (8vo grado). Determinar por varios métodos las densidades de aceite y de la disolución de caparrosa azul. ¿Cuál de los métodos trae los resultados más precisos?

La densidad de agua es de 10^3 kg/m^3.

Aparatos y materiales: probetas graduadas, vasos con agua, aceite y disolución de caparrosa azul, probetas, tubos de vidrio recto y en U, regla de medida.

238. (8vo grado). Determinar la velocidad máxima que comunica la "catapulta" a muelle a la barra de madera.

Aparatos y materiales: tabla de madera con "catapulta", regla, arandela.

239. (9no grado). Determinar la resistencia del resistor utilizando de los instrumentos de medida sólo el voltímetro. La resistencia interna de la pila es pequeña en comparación con la del voltímetro.

Aparatos y materiales: resistor de resistencia desconocida, resistor de resistencia conocida, voltímetro, pila, conductores.

240. (9no grado). Determinar, ¿cuáles dos elementos del circuito eléctrico se hallan en la "caja negra" y cómo están conectados?

Aparatos y materiales: reóstato, voltímetro, miliamperímetro, pila, conductores de conexión.

Nota. En la caja se hallaban una lámpara y un diodo acoplados en serie. Fue necesario definir la característica de voltios-amperios, descubrir y explicar su alinealidad.

241. (10mo grado). Valiéndose de las lentes disponibles componer tres sistemas ópticos de aumento de dos lentes.

Determinar teórica y experimentalmente los aumentos de estos sistemas.

Se puede determinar experimentalmente el aumento del sistema examinando y comparando a la vez las dimensiones lineales del objeto y de su imagen.

Aparatos y materiales: tres lentes tomadas del juego escolar, trípodes, pantalla, regla, vela, fósforos, regla dividida de un metro.

242. (10mo grado). Determinar el poder resolutivo de su ojo y la dependencia entre el mismo y el diámetro del diafragma dispuesto delante del ojo (el poder resolutivo se caracteriza por la distancia mínima entre dos puntos, con la cual estos puntos se perciben por el ojo uno separado de otro).

Aparatos y materiales: manantial de luz, lentes convergente y divergente, pantalla, hoja fina, regla, escala de medición.

X OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1976, Minsk)

RONDA TEORICA

243. (8vo grado). El maquinista del tren de pasajeros que iba con la velocidad $v_1 = 108$ km/h ha notado a la distancia $l_0 = 180$ m delante un tren de mercancías que iba en la misma dirección con la velocidad $v_2 = 32{,}4$ km/h. El maquinista conectó de inmediato el freno debido a lo cual el tren comenzó a moverse con la aceleración $a = -1{,}2$ m/s^2. ¿Es suficiente hacerlo para que los trenes no tropiecen?

244. (8vo grado). El coeficiente de rigidez del cordón de goma, cuyo largo es l y la masa m, es igual a k. El anillo hecho de este cordón gira con la velocidad angular ω en el plano horizontal alrededor del eje vertical que pasa por el centro del anillo. Determinar el radio del anillo en rotación.

245. (8vo grado). Con los resistores de 1, 2, 3 y 4 Ohms de resistencia está montado el circuito cuyo esquema se muestra en la figura 75. ¿Qué corriente fluirá por el amperímetro A_1 si la corriente, que pasa por el amperímetro A_2, es igual a 5 A? El voltímetro acusa 10 V. Los instrumentos de medida se consideran ideales.

246. (8–9 grados). Una esfera homogénea de paredes finas de radio R está cortada en dos partes y fijada como se muestra en la figura 76. ¿A qué altura se halla el centro de gravedad de la copa obtenida si la altura de su pata es h?

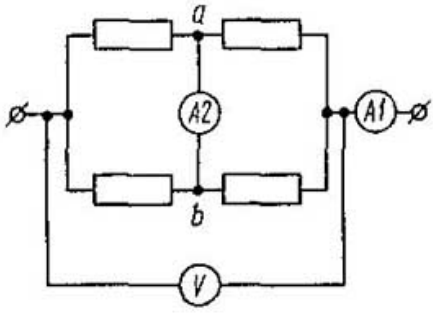


Fig. 75

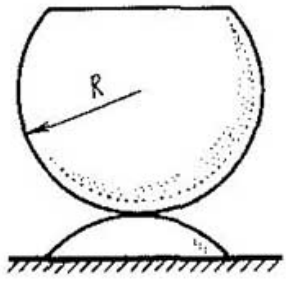


Fig. 76

247. (9no grado). Existe una capa de barrera ideal con el paso p–n. El espesor de esta capa es d, la permitividad ε. Trazar el gráfico de tensión y de potencial del campo eléctrico en la capa, suponiendo que la densidad de la carga en la capa se distribuye de la manera representada en la figura 77.

248. (9no grado). Determinar la fuerza de empuje del motor de reacción en el cual se usa como combustible el hidrógeno y como oxidan-

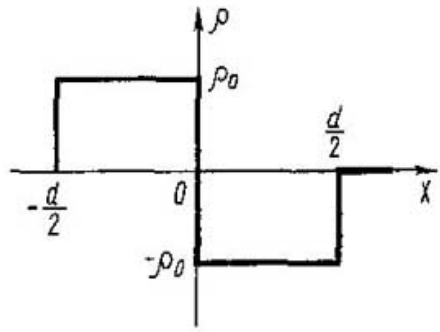


Fig. 77

te el oxígeno líquido. El consumo de hidrógeno por segundo es $\mu_1 = 24$ kg. La velocidad de salida de los gases de la tobera del cohete es $u = 4{,}2 \times 10^3$ m/s.

249. (9no grado). En el aparato eléctrico al vacío el cátodo de tungsteno puro se halla en un matraz grande que contiene restos de oxígeno a la presion $p = 10^{-2}$ Pa y la temepratura $T = 300$ K. Considerando que cada molécula dispuesta sobre el cátodo se pega al mismo, apreciar el tiempo de formación de la capa monomolecular. Las moléculas pueden considerarse como bolitas de diámetro $d = 3 \cdot 10^{-8}$ cm. La masa molar de tungsteno es $M = 0{,}184 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

250. (9-10 grados). ¿Qué presión máxima puede ser medida con ayuda de los manómetros en U de mercurio unidos en serie por un tubo corto si cada uno de los mismos permite medir la presión hasta 10^5 Pa?

251. (10mo grado). Un hombre observa al pájaro que se encuentra detrás de él a la distancia $d = 5$ m por los reflejos en las lentes de anteojos. Con ello él observa dos imágenes del pajaro: una a la distancia $f_1 = 5$ m y otra a la distancia $f_2 = 5/7$ m. Al volverse de cara al pájaro él observa a través de los anteojos la imagen del mismo a la distancia $f_3 = 2{,}5$ m.

Determinar ed índice de refracción del vidrio del que están hechas las lentes de los anteojos.

252. (10mo grado). ¿Por qué con ayuda de una lente se puede prender el papel a partir de la luz procedente del Sol, pero no se puede hacerlo a partir de la luz procedente de una estrella?

253. (10mo grado). Un satélite se mueve por la órbita circular a la distancia, que media de la superficie de la Tierra, igual al radio R de ésta. En algún momento desde el satélite se lanza una estación a otro planeta, después de lo cual la parte restante del satélite se mueve por la órbita elíptica que se aproxima mucho a la superficie de la Tierra en el punto opuesto al punto de despegue de la estación. ¿Qué parte máxima de la masa del satélite puede constituir la masa de la estación interplaneta-

ria? (La energía potencial del cuerpo de masa m en el campo de gravitación del cuerpo de masa M es igual a $W_n = -G\frac{Mm}{r}$.)

254. (10mo grado). En el circuito eléctrico constituido por dos condensadores iguales de capacidad C y una bobina de inductancia L conectados en serie (fig. 78) en el momento inicial un condensador posee la carga q_0, mientras que el otro no está cargado. ¿Cómo van a variar con el tiempo las cargas de los condensadores y la intensidad de corriente en el circuito después de cerrar la llave? Proponer un sistema oscilatorio mecánico análogo al circuito eléctrico dado.

RONDA EXPERIMENTAL

255. (8vo grado). Determinar el esquema del circuito que se encuentra en la caja con cuatro terminales y los parámetros eléctricos de los componentes del circuito.

Aparatos y materiales: manantial de corriente continua, resistores, amperímetro, voltímetro, conductores.

Nota. En la caja se hallaba el circuito cuyo esquema se muestra en la figura 79.

256. (8vo grado). Valiéndose del dinamómetro determinar la masa de la carga cuyo peso es superior al límite de medición de dicho dinamómetro.

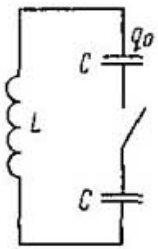


Fig. 78

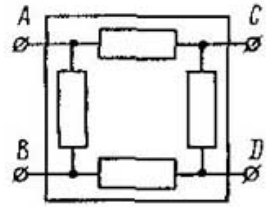


Fig. 79

Aparatos y materiales: trípode, varilla heterogénea, dinamómetro, carga, hilo, papel milimetrado.

257. (9no grado). Medir la presión atmosférica.

Aparatos y materiales: tubos de vidrio, tubo de goma, tapón, trípode, regla, vaso con agua.

258. (9no grado). Determinar la capacidad de los condensadores.

Aparatos y materiales: dos condensadores, manantial de corriente continua, voltímetro, conductores de conexión, cronómetro, tres resistores patrones.

259. (10mo grado). Determinar, ¿qué piezas eléctricas se encuentran

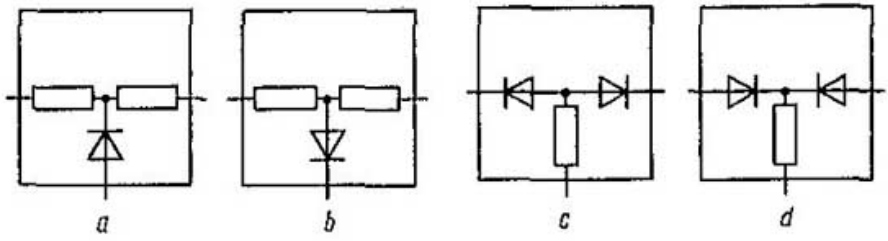


Fig. 80

en la caja con tres terminales y según qué esquema se hallan conectadas?

Aparatos y materiales: amperiovoltímetro, conductores.

Nota. En la caja se hallaba uno de los circuitos reproducidos en la figura 80.

260. (10mo grado). Determinar el coeficiente de refracción del líquido que se encuentra en el vaso.

Aparatos y materiales: vaso con agua, regla, bombilla, pila, pantalla.

XI OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1977, Frunze)

RONDA TEORICA

261. (8vo grado). El modelo funcional de la grúa es capaz de elevar 10 losas de hormigón sin romperse el cable. ¿Cuántas losas elevará una grúa real construida de los mismos materiales si las dimensiones lineales de la grúa, del cable y de las losas son 12 veces superiores a las del modelo?

262. (8vo grado). Dos témpanos de hielo se desplazan progresivamente con velocidades iguales en módulos, uno al norte y el otro al oeste. Resultó que en cualquier momento de tiempo en ambos témpanos se puede disponer relojes de tal modo que las velocidades de las puntas de sus agujas segunderas sean iguales respecto a la Tierra, siendo posible para cada momento sólo una tal disposición. Determinar, ¿a qué distancia se desplazan los témpanos en un día si la longitud de cada aguja segundera es igual a 1 cm? La esfera del reloj se halla situada horizontalmente.

263. (8vo grado). Una vez conectado el elemento galvánico de 1,5 V de tension a los bornes A y B (fig. 81), el amperímetro acusó la corriente de 1 A. Cuando la polaridad del elemento ha sido alterada por la opuesta, la corriente disminuyó dos veces. ¿Qué circuito eléctrico se halla dentro de la caja?

264. (8vo grado). La figura 82 fue hecha a base de la fotografía estroboscópica de un cubo que se mueve a lo largo de un plano inclinado.

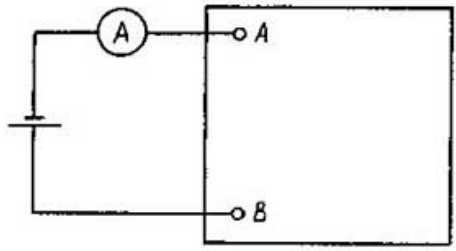


Fig. 81

El intervalo de tiempo entre los destellos consecutivos de la lámpara es igual a 0,1 s. Determinar el coeficiente de rozamiento del cubo contra el plano.

265. (9no grado). El circuito señalado en la figura 83 está montado con resistores y voltímetros iguales. El primer voltímetro indica $U_1 = 10$ V y el tercero $U_3 = 8$V. ¿Qué indica el segundo voltímetro?

266. (9no grado). En la figura 84 se muestran dos ciclos cerrados: ABCA y ACDA. Ambos ciclos están realizados con un gas monoatómico ideal. ¿En cuáles tramos de los ciclos el gas adquiere y en cuáles pierde el calor? ¿Cuál de los ciclos tiene mayor rendimiento? ¿Cuántas veces?

267. (9no grado). En un generador electrostático de alto voltaje (fig. 85) las cargas se transfieren por una cinta dieléctrica y cargan el electrodo esférico de alto voltaje cuyo radio es R = 1,5 m. Apreciar los valores máximos de la tensión y de la intensidad de corriente que pueden obtenerse con tal generador si la velocidad de la cinta es v = 20 m/s y su anchura d = 1 m. El salto de chispa en el aire se produce con la intensidad del campo electrostático E = 30 kV/cm.

268. (9no grado). El uranio natural consta de una mezcla de dos isótopos de masas atómicas 235 y 238 y la relación de concentraciones de los átomos de estos dos isótopos de 7:1000. Para aumentar la concentra-

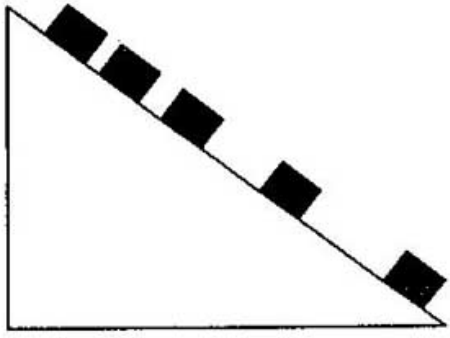


Fig. 82

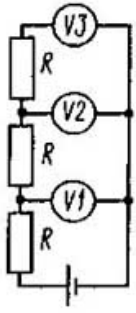


Fig. 83

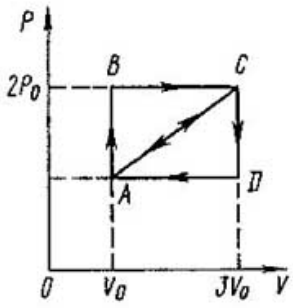


Fig. 84

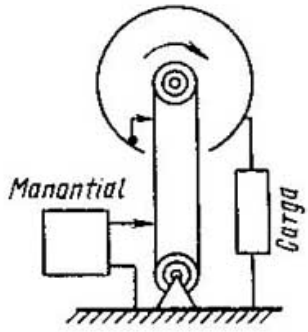


Fig. 85

ción del isótopo ^{235}U, que se emplea en los reactores atómicos, se usa la salida del compuesto gaseoso UF_6 (hexafluoruro de uranio) al vacío a través de pequeños orificios. El gas pasa por el tubo T de paredes porosas (fig. 86). El gas pasado por las paredes del tubo es evacuado del recipiente C. Apreciar la variación, que se realiza con ello de la concentración de moléculas de hexafluoruro de uranio. La masa atómica relativa del flúor equivale a 19.

269. (9no grado). La figura 87 fue hecha a base de una fotografía estroboscópica de movimiento de dos bolitas en colisión de diámetro igual, pero de masas diferentes. Con la flecha en la figura se indica la dirección de movimiento de una de las bolitas antes de la colisión. Determinar la relación de masas de las bolitas. Señalar, ¿en qué dirección se movía la segunda bolita antes de la colisión?

Fig. 86

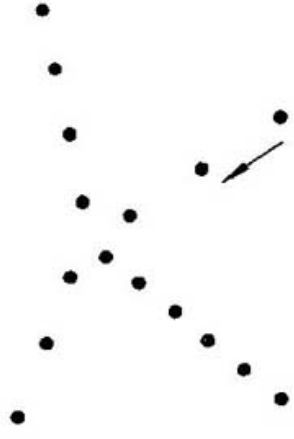


Fig. 87

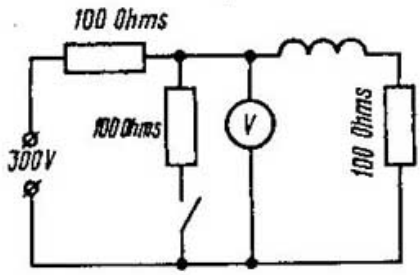


Fig. 88

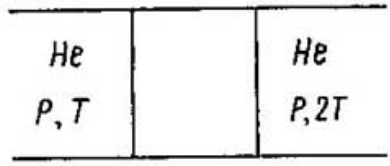


Fig. 89

270. (10mo grado). Trazar el curso aproximado del gráfico de dependencia entre la indicación del voltímetro y el tiempo después de cerrar la llave K (fig. 88). El voltímetro y la bobina de inductancia se consideran ideales.

271. (10mo grado). La Luna está fotografiada simultáneamente de un mismo lado desde la Tierra y desde un satélite de la Luna. La órbita del satélite es cirular. El diámetro de la imagen de la Luna en la foto tomada desde la Tierra es $d_1 = 4{,}5$ mm y en la foto tomada desde el satélite de la Luna, $d_2 = 250$ mm. Hallar el período de rotación del satélite de la Luna por su órbita si ambas fotos fueron tomadas con ayuda de iguales objetivos de distancia focal F = 500 mm. Adoptar que la aceleración de caída libre en la Luna es 6 veces menor que en la Tierra y la distancia L entre la Tierra y la Luna es igual a 380 000 km.

272. (10mo grado). Una cavidad termoaislada por pequeños orificios iguales (fig. 89) está unida con dos volúmenes que contienen helio gaseoso. La presión de helio en estos volúmenes se mantiene constante e igual a P, mientras que la temperatura se mantiene igual a T en un volumen y a 2T en el otro. Hallar la presión y la temperatura estabilizadas dentro de la cavidad.

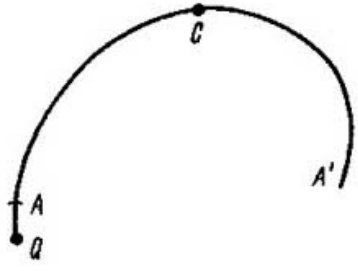


Fig. 90

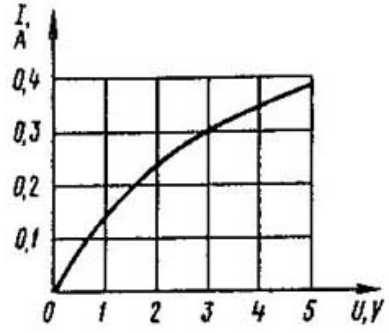


Fig. 91

273. (10mo grado). La figura 90 fue hecha a base de una fotografía de trazas de las partículas en la cámara de Wilson. La desintegración de los núcleos de gas que llena la cámara de Wilson se debe en este caso a la acción de los neutrones rápidos. La cámara de Wilson estaba llena de una mezcla de hidrógeno (H_2), de vapores de alcohol (C_2HSOH) y de agua (H_2O) y dispuesta en el campo magnético con la inducción de 1,3 Tl. El vector de la inducción magnética está dirigido perpendicularmente al plano de la figura.

1. Determinar la energía del protón aparecido en el punto a. La trayectoria de este protón es la curva AA'. ¿Por qué cambia la curvatura de la trayectoria del protón? ¿Cuál es la energía de este protón en el punto C de la trayectoria? La masa del protón es igual a $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg.

2. Determinar, ¿el núcleo de cuál átomo se ha desintegrado en el punto a si las trazas de las partículas que comienzan en este punto son identificadas como huellas de dos protones y dos α-partículas?

274. (10mo grado). En la figura 91 se ofrece la característica de voltios-amperios de la bombilla para linterna de bolsillo. La bombilla está conectada en el circuito que se muestra en la figura 92.

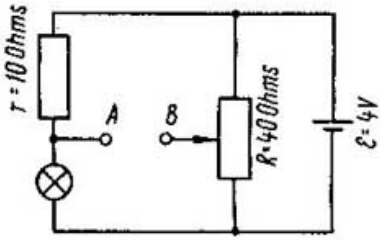


Fig. 92

1. Hallar gráficamente la intensidad de corriente en la bombilla.

2. ¿Con qué posición del cursor de potenciómetro la tensión entre los puntos A y B es igual a cero?

3. ¿Con qué posición del cursor de potenciómetro la tensión entre los puntos A y B no va a variar casi, siendo pequeños los cambios de la FEM de la pila?

La resistencia interna de la pila puede ser menospreciada.

RONDA EXPERIMENTAL

275. (8vo grado). Determinar la densidad del metal que se halla en uno de dos pedazos de cera de modelar si se conoce que las masas de cera en ambos pedazos son iguales. Apreciar la exactitud del resultado obtenido. No se permite extraer el metal de la cera.

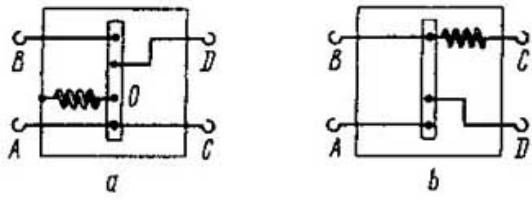


Fig. 93

Aparatos y materiales: muestras a investigar, balanza con juego de pesas, vaso con agua, trípode.

276. (8-9 grados). Con ayuda de dos dinamómetros y dos reglas de medición determinar el circuito mecánico posible y los parámetros de los componentes en la caja sin abrirla.

N o t a. No se permite doblar los extremos salientes de alambre ni extenderlos con la fuerza que rebasa las indicaciones límites del dinamómetro.

La construcción de la caja fue tal como se muestra en las figuras 93, a y 93, b.

277. (9no grado). Determinar el volumen del aire que extrae la bomba de Komovsky en un ciclo y la presión atmosférica.

Aparatos y materiales: bomba de Komovsky, plato al vacío con campana, manómetro, regla, tablas matemáticas.

278. (10mo grado). Determinar de manera más precisa el índice de refracción del líquido.

Aparatos y materiales: matraz con el líquido a investigar, cubeta de vidrio, lente, pantalla, lámpara, pila, cinta de papel milimetrado.

279. (10mo grado). Determinar el número máximo posible de los parámetros del líquido.

Aparatos y materiales: matraz con el líquido, vaso picudo, pila, amperímetro, voltímetro, dinamómetro, regleta con electrodos, interruptor, cordón de goma, regla, trozo de alambre, pesa.

XII OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1978, Ashjabad)

RONDA TEORICA

280. (8vo grado). En el gráfico (fig. 94) se reproduce la dependencia entre la intensidad de corriente que fluye por la lámpara de automóvil y la tensión en la misma. La lámpara se conecta al manantial de tensión continua U = 10 V en serie con el resistor cuya resistencia es R = 4 Ohms. Determinar la potencia de la lámpara.

281. (8vo grado). Un proyectil explota en cierto punto de la trayectoria rompiéndose en dos fragmentos. En la figura 95, hecha en escala

determinada, con cruces están señaladas las posiciones del proyectil y de uno de los fragmentos dentro de iguales intervalos consecutivos de tiempo. Hallar las posiciones de otro fragmento en respectivos momentos de tiempo si se conoce que el mismo se halla en el punto B en el instante, cuando el primer fragmento se encuentra en el punto A. Con la flecha en la figura se indica la dirección de aceleración de caída libre.

282. (8vo grado). En el fondo de una cacerola cilíndrica de superficie S_1 practicaron un orificio de superficie S_2 e insertaron en el mismo un tubo plástico. La masa de la cacerola con el tubo es igual a m. La cacerola se halla sobre una hoja plana de goma con el fondo hacia arriba (fig. 96). Encima en el tubo se vierte con cuidado el agua. ¿Hasta qué nivel se puede echar el agua de modo que no escurra por debajo?

283. (8–10 grados). El péndulo es una varilla liviana de largo l con carga pesada en un extremo. Al otro extremo está fijado un casquillo cilíndrico liviano de radio interior r puesto sobre el eje horizontal giratorio (fig. 97). El coeficiente de rozamiento entre el casquillo y el eje es

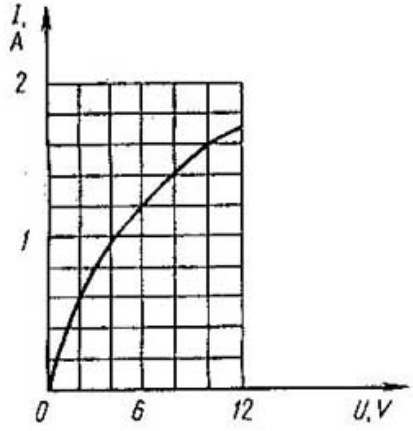


Fig. 94

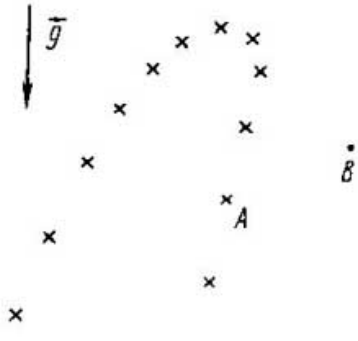


Fig. 95

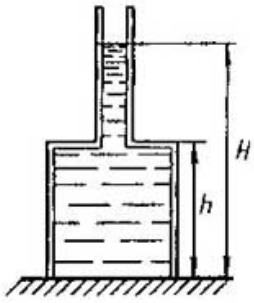


Fig. 96

Fig. 97

μ. Determinar el ángulo α de desviación entre la varilla y la vertical en equilibrio.

284. (9no grado). Los géiseres pueden considerarse como grandes recipientes subterráneos llenos de agua freática y calentados por el calor terrestre (fig. 98). La salida de agua de los mismos a la superficie de la Tierra se realiza por un estrecho canal, el cual en el período "tranquilo" está prácticamente del todo lleno de agua. Creyendo que el período "activo" llega, cuando en el recipiente subterráneo se pone a hervir el agua, y que durante la erupción el canal está lleno sólo de vapor que se expulsa al exterior, apreciar, ¿cuál parte del agua pierde el recipiente del géiser durante una erupción? La profundidad del canal es $h = 90$ m; el calor de evaporación de agua $\lambda = 2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg, la capacidad calorífica del agua $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ J/(kg·K). La dependencia entre la presión del vapor saturado de agua y la temperatura se reproduce en el gráfico (fig. 99).

285. (9no grado). El modelo de helicóptero construido en 1/10 del tamaño natural se mantiene en el aire con ayuda de un motor de 30 W de potencia. ¿Cuál debe ser la potencia mínima del motor de helicóptero construido de los mismos materiales que el modelo?

286. (9no grado). En el circuito cuyo esquema se muestra en la figura 100 la FEM de la pila es $\mathcal{E} = 100$ V, su resistencia interna $r = 100$ Ohms, la capacidad del condensador $C = 200$ μF y la resistencia del calentador $R = 10$ Ohms. La llave K se conmuta entre los contactos a y b 10 veces

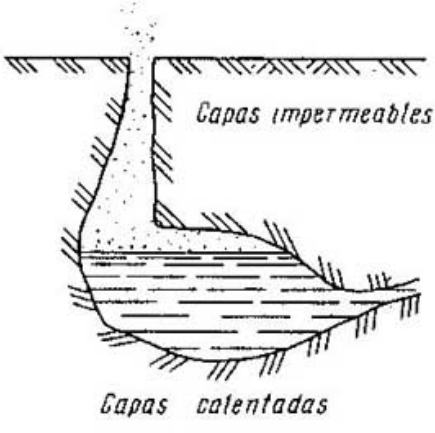


Fig. 98

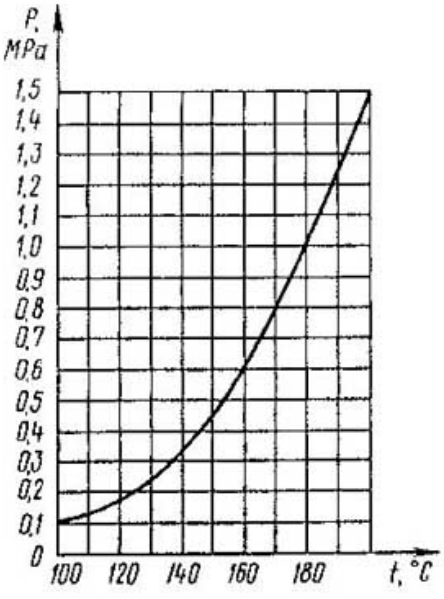


Fig. 99

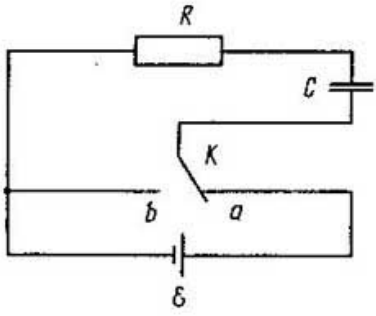


Fig. 100

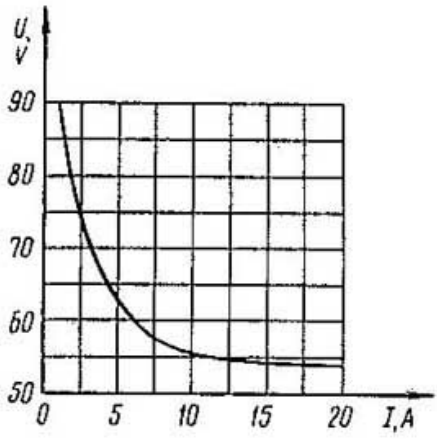


Fig. 101

por segundo. Cuando la llave se halla en la posicion a, el condensador se carga del todo, mientras que al conmutarse la misma en la posición b, el condensador se descarga por completo. ¿Cuál es el rendimiento del circuito? ¿Cuántas veces es superior que en caso de estar acoplado el calentador directamente a la pila? ¿Cuál es la potencia media de la corriente eléctrica en el calentador?

287. (9no grado). En la figura 101 se ofrece el gráfico de dependencia entre la tensión en el espacio de descarga de la descarga en arco y la corriente. El arco está conectado al manantial de tensión continua en serie con un resistor. ¿Con qué valor máximo de la resistencia del resistor el arco puede arder con la tensión del manantial $U_0 = 85$ V?

288. (9–10 grados). En el espacio entre las paredes de la ampolla del termos fue establecida la presión $p = 10^{-2}$ Pa a la temperatura del ambiente. Apreciar el tiempo en el curso del cual el té contenido en el termos se va a enfriar desde 90 hasta 70 °C. La superficie de la ampolla es $S = 600$ cm^2. La capacidad del termos es 1 litro. La capacidad calorífica específica del agua es $c = 4{,}2 \times 10^3$ J/(kg·K); la constante universal de los gases es $R = 8{,}3$ J/(mol·K). No tomar en consideración la fuga de calor por el tapón.

289. (10mo grado). Al aumentar la intensidad de corriente la tensión en el espacio de descarga de la descarga en arco disminuye tendiendo con grandes valores de la intensidad de corriente a un valor constante. El arco eléctrico está acoplado a la red en serie con cierto resistor autorregulador. La característica de voltios-amperios de dependencia entre la tensión y la intensidad de corriente de tal circuito se muestra en la figura 102.

1) Construir la característica de voltios-amperios del arco sin resistor autorregulador. 2) Valiéndose de la característica obtenida de

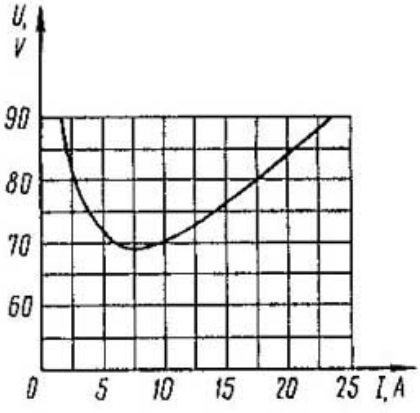


Fig. 102

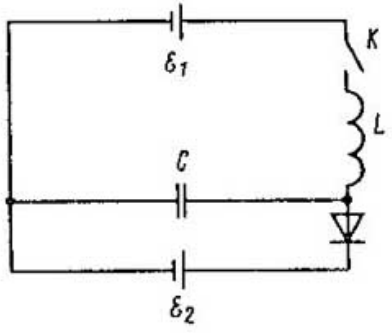


Fig. 103

voltios-amperios del arco determinar la resistencia máxima del resistor autorregulador con el cual el arco puede arder siendo la tensión del manantial $U_0 = 85$ V.

290. (10mo grado). En el circuito cuyo esquema se muestra en la figura 103 la FEM $\mathcal{E}_2$ de la batería B_2 es mayor que la FEM $\mathcal{E}_1$ de la batería B_1. Determinar la carga que fluirá por la batería B_2 al cerrarse la llave K, adoptando que la resistencia interna de ambas baterías y la resistencia de la bobina son muy pequeñas. El diodo D se considera ideal

Fig. 104

(su resistencia directa es igual al cero y la inversa, a la infinidad). Antes de cerrarse la llave el condensador C no estaba cargado.

291. (10mo grado). Utilizando la fotografía confeccionada para un cartel de reclamo (fig. 104) determinar: 1) la distancia focal F del objetivo de la cámara fotográfica, 2) ¿a qué distancia x de las palmas de las manos estaba situado el objetivo durante la toma de fotografía, 3) el tamaño l del pez sacado por el pescador, 4) el diámetro d del objetivo; adoptar que el difuminado de los elementos de la imagen no excede de 0,2 mm. El objetivo de la cámara se considera como una lente fina.

RONDA EXPERIMENTAL

292. (8vo grado). Determinar la relación entre las densidades de dos líquidos dados.

Aparatos y materiales: dos vasijas con líquidos diferentes, palanca-regla, dos cargas, trípode con manguito y patilla.

293. (8vo grado). Comprobar experimentalmente la realización de la ley de conservación del impulso al chocar una bola en movimiento con otra inmóvil dispuesta en el tramo horizontal del canalón. Explicar los resultados obtenidos.

Aparatos y materiales: trípode con manguito y patilla (fig. 105), juego de dos bolas de plástico y dos metálicas, canalón en forma de arco, hojas de papel blanco y de papel de copiar, regla de escalas gráficas, balanza y juego de pesas.

294. (9no grado). Comprobar experimentalmente la realización de las leyes de conservación de la energía y del impulso al chocar una bola en movimiento con otra inmóvil dispuesta en el tramo horizontal del canalón. Explicar los resultados obtenidos.

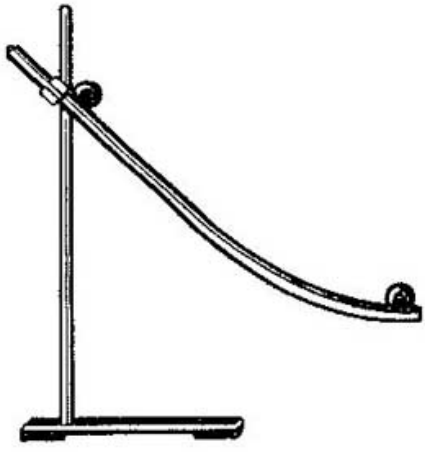


Fig. 105

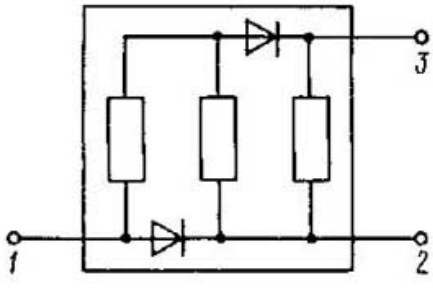


Fig. 106

Aparatos y materiales: trípode con manguito y patilla (fig. 105),juego de dos bolas metálicas y dos de plástico, canalón en forma de arco, hojas de papel blanco y de papel de copiar, regla de escalas gráficas, balanza y juego de pesas, pequeña bola de masa conocida.

295. (9no grado). Determinar el esquema de la "caja negra" que contiene 3 resistores y 2 diodos. Hallar las resistencias de los resistores.

Aparatos y materiales: caja con tres terminales, ohmímetro, diodo.

N o t a. En la "caja negra" se halla el circuito mostrado en la figura 106.

296. (10mo grado). Determinar los parámetros de los elementos: las capacidades de los condensadores y la inductancia de la bobina en el circuito eléctrico ofrecido.

Aparatos y materiales: el circuito eléctrico constituido por dos condensadores y una bobina de inductancia (fig. 107), avómetro, generador acústico, conductores de conexión.

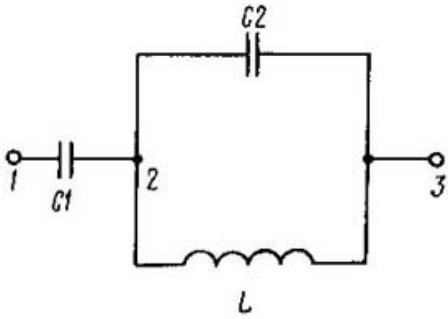


Fig. 107

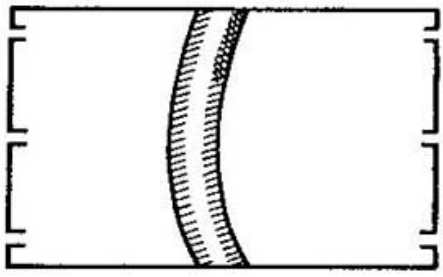


Fig. 108

297. (10mo grado). Determinar el circuito óptico de la "caja negra" y los parámetros probables de los elementos ópticos que hallan en la misma.

Aparatos y materiales: caja con seis orificios, regla de escalas gráficas, 4 alfileres, mesa elevadora, papel.

N o t a. La constitución de la caja se muestra en la figura 108.

XIII OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1979, Lvov)

RONDA TEORICA

298. (8vo grado). La figura 109 fue hecha a base de la fotografía tomada de las colas de humo que arrastran dos locomotoras que avanzan por un trayecto rectilíneo del ferrocarril con las velocidades $v_1 = 50$ km/h

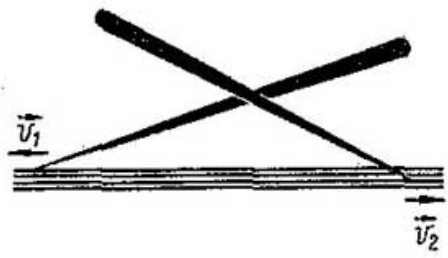


Fig. 109

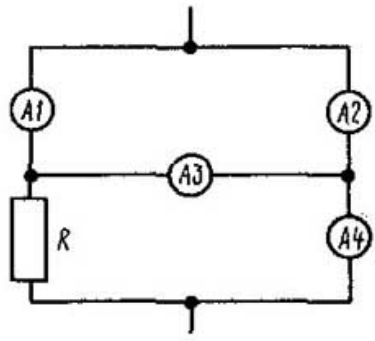


Fig. 110

y v_2 = 70 km/h (vista superior). Las direcciones de movimiento de los trenes están señaladas con flechas. Hallar la velocidad del viento.

299. (8vo grado). Un observador se mueve con velocidad constante por cierto plano inclinado. Un cuerpo lanzado bajo cierto ángulo al horizonte atraviesa la trayectoria de movimiento del observador dos veces y con el intervalo de tiempo τ. Ambas veces el cuerpo se halla delante del observador a una misma distancia del mismo. ¿Cómo es la trayectoria de movimiento del cuerpo desde el punto de vista del observador?

Al intersecarse dos veces las trayectorias el observador mide los caminos recorridos por el cuerpo en intervalos consecutivos de tiempo iguales a τ. Hallar la relación de estos caminos.

300. (8vo grado). Hay dos vasijas termoaisladas. En la primera se hallan 5 l de agua a la temperatura t_1 =60 °C, en la segunda un litro de agua a la temperatura t_2 = 20 °C. Primero una parte del agua es trasegada de la primera vasija a la segunda. Luego, cuando en la segunda vasija se haya establecido el equilibrio térmico, de la misma a la primera vasija se trasiega tanta agua que los volúmenes en las vasijas llegan a ser iguales a los iniciales. Al cabo de estas operaciones la temperatura de agua en la primera vasija es igual a t_1 = 59 °C. ¿Cuánta agua trasegaron de la primera vasija a la segunda y viceversa?

301. (8–9 grados). Cuatro amperímetros iguales y un resistor están acoplados como se muestra en la figura 110. El amperímetro A_1 acusa la corriente I_1 = 2 A, el amperímetro A_2, la corriente I_2 = 3 A. ¿Qué corrientes fluyen por los amperímetros A_3, A_4 y el resistor? Hallar la relación $\frac{r}{R}$ de la resistencia interna r del amperímetro a la resistencia R del resistor.

302. (9no grado). La figura 111 fue hecha a base de la fotografía tomada de las colas de humo que arrastran tres locomotoras avanzando por un trayecto rectilíneo del ferrocarril. La velocidad de la primera

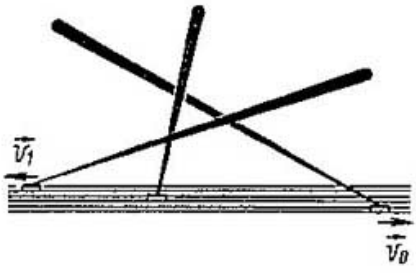


Fig. 111

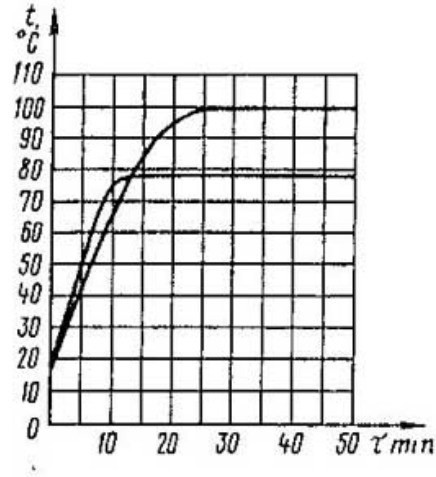


Fig. 112

locomotora es $v_1 = 50$ km/h, de la segunda $v_2 = 70$ km/h. Las direcciones de su movimuento están señaladas en la figura con flechas. Hallar la velocidad de la tercera locomotora.

303. (9no grado). Una bola de masa 2m es lanzada verticalmente hacia arriba con la velocidad v_0. A la bola está atado un hilo liviano cuyo largo es $l < \frac{v_0^2}{2g}$, en su otro extremo está fijada una bola de masa m. ¿Dentro de qué tiempo y a qué distancia del punto de lanzamiento las bolas van a chocar? El hilo es absolutamente rígido.

304. (9no grado). Un recipiente termoaislado está bombeado hasta un profundo vacío. El gas monoatómico que rodea al recipiente posee la temperatura T_0. En cierto momento se abre el grifo y el recipiente se llena con el gas. ¿Qué temperatura T_1 tendrá el gas en el recipiente después de llenar el mismo?

305. (9-10 grados). En una pequeña cacerola metálica de paredes finas echaron 0,5 l de agua y la pusieron sobre el horno. Midiendo la temperatura del agua en distintos momentos de tiempo construyeron el gráfico de dependencia entre la temperatura y el tiempo. Luego vaciaron el agua y en la misma cacerola vertieron 0,7 kg de alcohol. Volvieron a poner la cacerola sobre el mismo horno y midiendo nuevamente la temperatura construyeron el gráfico de dependencia entre la temperatura de alcohol y el tiempo. Ambos gráficos se presentan en la figura 112. Valiéndose de estos gráficos determinar la capacidad calorífica específica de alcohol y el calor específico de su evaporación si en 45 minutos de ebullición la cantidad del alcohol en la cacerola disminuyó dos veces. La capacidad calorífica de la cacerola es c = 200 J/K. La evaporación desde la superficie de los líquidos puede ser menospreciada.

306. (10mo grado). En un cilindro de 10 l de volumen cerrado por el émbolo y dispuesto en el termostato con la temperatura de 40 °C se halla por 0,05 mol de dos sustancias. Determinar la masa del líquido en el cilindro después de la compresión isotérmica, a efecto de la cual el volumen debajo del émbolo disminuye tres veces. A la temperatura de 40 °C la presión de los vapores saturados del primer líquido es $p_{s1} = 7$ kPa; la presión de los vapores saturados del segundo líquido a la misma temperatura es $p_{s2} = 17$ kPa. Trazar la isoterma de compresión. La masa molar del primer líquido es $M_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ kg/mol, la del segundo es $M_2 = 4{,}6 \cdot 10^{-2}$ kg/mol.

307. (10mo grado). Moviéndose el tranvía con cierta velocidad por un tramo horizontal de la vía su motor consume la corriente $I_1 = 100$ A. El rendimiento del motor es $\eta = 0{,}9$. Moviéndose el tranvía con la misma velocidad por un tramo inclinado hacia abajo el motor no consume corriente. ¿Qué corriente va a consumir el motor en caso de moverse el tranvía por el mismo tramo de la vía hacia arriba con la misma velocidad? Solucionando el problema hay que tener en cuenta que el rendimiento del motor depende de la corriente consumida.

308. (10mo grado). Dos cilindros de diferentes radios giran en sentidos opuestos alrededor de ejes horizontales paralelos con la velocidad angular $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2s^{-1}$. La distancia entre los ejes por la horizontal es igual a $l = 4$ m. En el momento de tiempo $t = 0$ sobre los cilindros, perpendicularmente a sus ejes, se coloca una viga de modo que la misma se halla en la posición horizontal y al mismo tiempo toca las superficies de ambos cilindros, mientras que su centro se dispone exactamente sobre el eje del cilindro de menor radio $r = 0{,}25$ m, como se muestra en la figura 113. Calcular y demostrar de manera gráfica la dependencia entre el desplazamiento horizontal de la viga y el tiempo. El coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}05$ y la aceleración de caída libre g se adopta igual a 10 m/s².

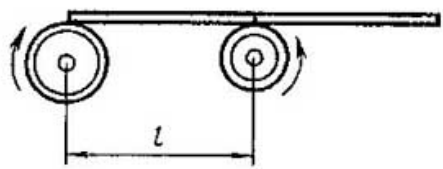


Fig. 113

309. (10mo grado). Un conductor de la masa m y el largo l se halla suspendido de sus extremos a un dieléctrico con ayuda de dos resortes iguales de la rigidez total k.

El conductor se encuentra en un campo magnético homogéneo cuya inducción $\vec{B}$ es perpendicular al plano en el cual se disponen el conductor

y los resortes. El conductor fue desplazado en el plano vertical de la posición de equilibrio y suelto. Determinar el movimiento ulterior del conductor en el plano vertical si a los extremos superiores de los resortes está conectado un condensador de la capacidad C. La resistencia, la inductancia propia y la capacidad de los conductores pueden ser menospreciadas.

RONDA EXPERIMENTAL

310. (8vo grado). Determinar las masas m_1 y m_2 de dos pesas metálicas y la masa m_0 de la varilla de madera.

Aparatos y materiales: varilla de madera, pesas metálicas, apoyo, prisma, regla de medición, probeta graduada, vaso con agua, hilos.

311. (8vo grado). Determinar las especies de las muestras de madera y la densidad de la solución de la caparrosa azul.

Aparatos y materiales: muestras de dos distintas especies de madera, probeta graduada, vaso con agua, vaso con solución de caparrosa azul, gancho, tabla de densidades de diferentes especies de madera.

312. (9no grado). Determinar con el error mínimo posible la resistencia desconocida del resistor, la resistencia interna del manantial de corriente y su FEM.

Aparatos y materiales: manantial de corriente continua, miliamperímetro de resistencia interna $R_a = 0{,}8$ Ohm, dos resistores de resistencias conocida y desconocida, llave, conductores de conexión.

313. (10mo grado). Determinar el circuito según el cual está montado el rectificador: de un semiciclo o de dos semiciclos.

Aparatos y materiales: rectificador sin filtro de pulsaciones de resistencia interna menospreciablemente pequeña, dos calorímetros iguales con iguales calentadores eléctricos, condensador electrolítico de capacidad grande (la variación de la tensión en el condensador en el tiempo de 0,02 s durante la descarga del condensador a traves del calentador es menospreciablemente pequeña en comparación con la tensión propiamente dicha), diodo.

314. (10mo grado). Determinar lo más preciso posible el coeficiente de refracción del vidrio a partir del cual fue construido el semicilindro de superficie pulida.

Aparatos y materiales: vidrio opaco, escuadra, regla, lámpara elétrica que se acopla a los bornes del rectificador, papel blanco y negro.

XIV OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA
(1980, Riga)

RONDA TEORICA

315. (8vo grado). Una estructura articulada consta de tres rombos cuyos lados se relacionan como 3:2:1 (fig. 114). La cúspide A_3 se desplaza horizontalmente con la velocidad v_0. Determinar las velocidades de las cúspides A_1, A_2, B_1 en el momento, cuando todos los ángulos de la estructura son rectos.

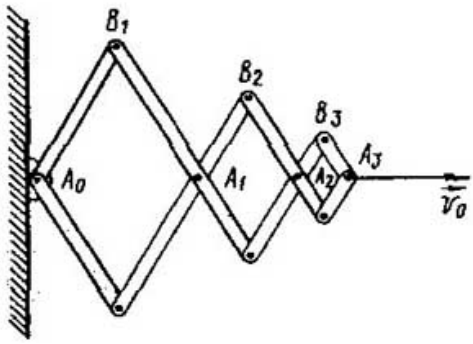


Fig. 114

316. (8vo grado). Una pequeña gota de lluvia abandona la nube a una altura grande cuando no sopla el viento. En el momento, cuando la aceleración a de la gota llegó a ser igual a 5 m/s^2, su velocidad era igual a v = 7,5 m/s. A proximidad de la tierra la gota cae con una velocidad constante. Dando en el cristal lateral del automóvil en movimiento la gota deja en el mismo una huella bajo el ángulo $\alpha = 45°$ respecto a la vertical. ¿Multará o no el inspector de la IEA (inspección estatal automovilista) al chófer por el exceso de la velocidad si la velocidad admisible de movimiento del automóvil es $u_0 = 60$ km/h? La fuerza de resistencia del aire se considera directamente proporcional a la velocidad de la gota respecto al aire.

317. (8vo grado). En un cubo se halla la mezcla de agua con el hielo. La masa de la mezcla es M = 10 kg. El cubo lo trajeron a la habitación y se pusieron de inmediato a medir la temperatura t de la mezcla. El gráfico obtenido de dependencia entre la temperatura y el tiempo τ se reproduce en la figura 115. El calor específico del agua es C = 4200 J/(kg·K) y el calor de fusión del hielo $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ J/kg. Determinar, ¿cuánto hielo había en el cubo, cuando lo trajeron a la habitación? La capacidad calorífica del cubo puede ser menospreciada.

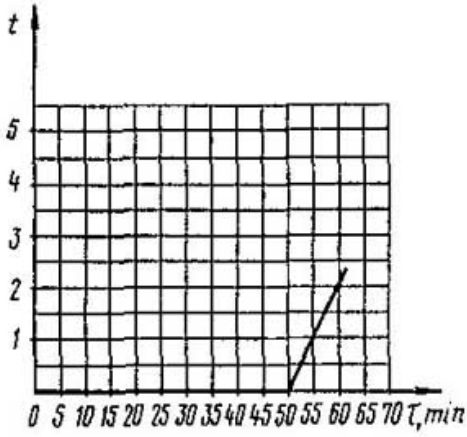


Fig. 115

318. (8vo grado). El circuito eléctrico constituido por los resistores R1, R2, R3 con las resistencias R_1, R_2 y R_3, respectivamente, está acoplado a dos manantiales de tensión continua U_1 y U_2 como se muestra en la figura 116. ¿Con cuáles condiciones la intensidad de corriente que fluye por el resistor R1 será igual al cero?

319. (9no grado). Una estructura articulada consta de tres rombos cuyos lados se relacionan como 1:2:3 (fig. 117). La cúspide A_3 se desplaza en el sentido horizontal con la velocidad v_0. Determinar las velocidades de las cúspides A_1, B_2, A_2 en el momento, cuando todos los ángulos de la estructura son rectos.

320. (9no grado). Una gota grande de lluvia abandona la nube a una altura grande cuando no sopla el viento. En el momento, cuando la aceleración a de la gota llegó a ser igual a 7,5 m/s², su velocidad era igual a v = 20 m/s. A proximidad de la tierra la gota cae con una velocidad constante y dando en el cristal lateral del automóvil deja en el

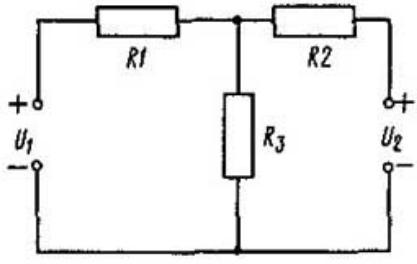


Fig. 116

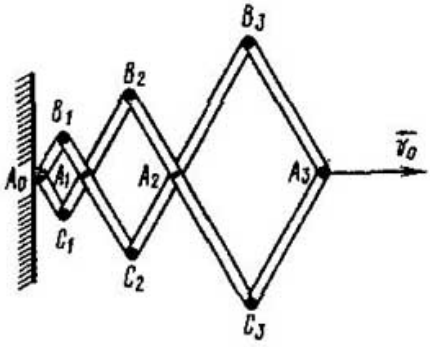


Fig. 117

mismo una huella bajo el ángulo $\alpha = 30°$ respecto a la vertical. ¿Multará o no el inspector de la IEA al chófer por el exceso de la velocidad si la velocidad admisible de movimiento del automóvil es $u_0 = 60$ km/h? La fuerza de resistencia del aire se considera proporcional al cuadrado de la velocidad de la gota.

321. (9no grado). En una novela de ficción científica se describe una situación de emergencia en la cual un astronauta de masa M = 100 kg vino a parar a la distancia l = 100 m de la nave con un vaso de agua congelada. Facilitando la sublimación (evaporación) del hielo el astronauta regresa a la nave. ¿Es real tal método de regreso? Apreciar, ¿en qué tiempo el astronauta regresará a la nave? Adoptar que la sublimación del hielo se efectúa a la temperatura constante T = 272 K. La presión de los vapores saturados a esta temperatura es p = 550 Pa. La constante universal de los gases es R = 8,31 J/(mol·K). Las dimensiones del vaso y la masa del hielo se dan cuales se le antoja.

322. (9no grado). El flujo dirigido de electrones sale desde una hendidura fina y larga con la velocidad $v = 10^5$ m/s (fig. 118). La concentración de los electrones en el flujo es $n = 10^{10}$ partículas/m^3. ¿A qué distancia de la hendidura el espesor del haz aumenta dos veces? La masa del electrón es $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, la carga del electrón $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, la constante eléctrica $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

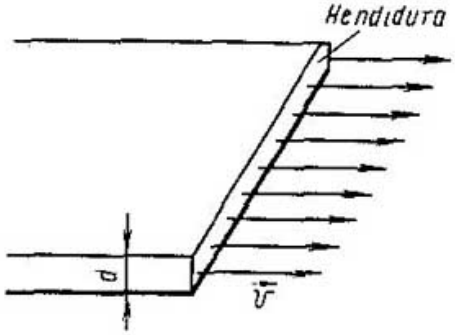


Fig. 118

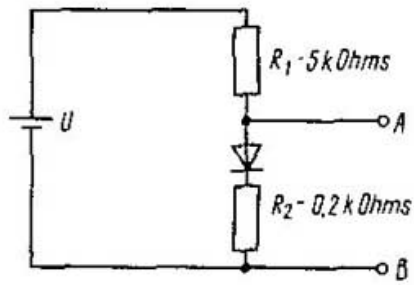


Fig. 119

323. (9no grado). Para obtener la tensión que dependiese poco de la temperatura se arma una instalación según el esquema ofrecido en la figura 119. Las características de voltios-amperios del diodo D a las temperaturas del medio ambiente $t_1 = 125$ °C, $t_2 = 25$ °C, $t_3 = -60$ °C se ofrecen en la figura 120. La tensión del manantial es U = 6 V a la temperatura de 25 °C y con el aumento de la temperatura crece linealmente. El coeficiente de temperatura de variación de la tensión es igual a $25 \cdot 10^{-3}$ V/K. Hallar la tensión entre los bornes A y B a la temperatura t = 25 °C y la dependencia entre esta tensión y la temperatura.

324. (10mo grado). Desde el Polo Sur y el Polo Norte de la Tierra simultáneamente despegan dos cohetes con iguales velocidades iniciales dirigidas horizontalmente. Dentro del tiempo $\tau = 3$ h 20 min los cohetes se encontraban a la distancia máxima uno de otro. Determinar la distancia máxima entre los cohetes. La aceleración de caída en la Tierra se considera conocida. El radio de la Tierra es $R_T = 6400$ km.

325. (10 grado). El altoparlante está provisto del difusor cuya superficie frontal es $S = 300$ cm^2 y la masa $m = 5$ g. La frecuencia resonante del difusor es $\nu_0 = 50$ Hz. ¿Cuál será su frecuencia resonante si el altoparlante es dispuesto en la pared de una caja cerrada de volumen $V_0 = 40$ l como se muestra en la figura 121. Efectuar el cálculo suponiendo que la temperatura del aire en el interior de la caja no varía a efecto de vibrar el difusor.

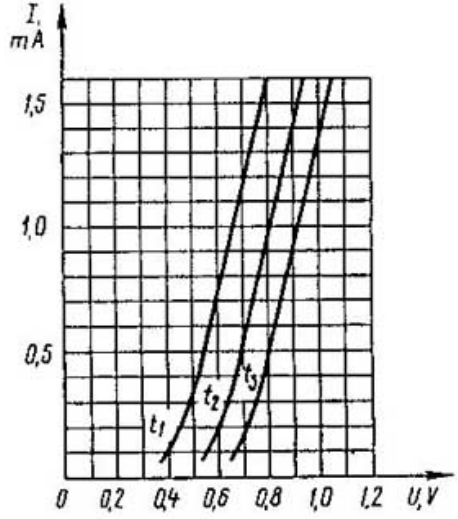


Fig. 120

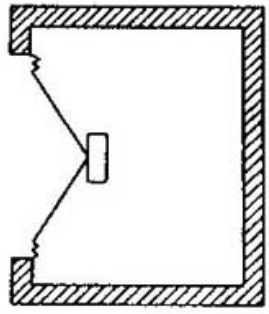


Fig. 121

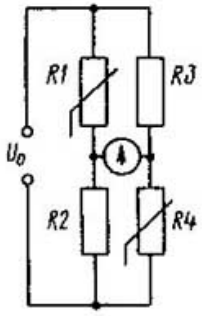


Fig. 122

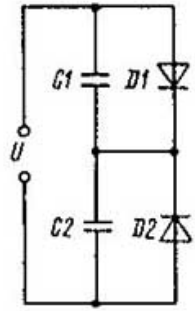


Fig. 123

326. (10mo grado). El circuito representado en la figura 122 consta de dos resistores iguales R2 y R3 de resistencia R cada uno y dos iguales resistores no lineales R1, R4 cuya característica de voltios-amperios tiene el aspecto $U = \alpha I^2$ (en donde α es el coeficiente constante conocido). ¿Con qué tensión del manantial de alimentación U_0 la intensidad de corriente que pasa por el galvanómetro G es igual al cero?

327. (10mo grado). El circuito constituido por dos condensadores C1 y C2 de capacidad desigual (C2 > C1) y dos diodos ideales D1 y D2 (fig. 123) está acoplado al manantial de tensión alterna $u = U_0 \cos \omega t$. Determinar la dependencia entre la tensión en los condensadores y el tiempo en el régimen estable. Representar las dependencias obtenidas en el gráfico. La resistencia del diodo ideal en el sentido directo es igual al cero y en el inverso, a la infinidad.

328. (10mo grado) ¿Es verosímil o no el cuento de que los combatientes griegos, siguiendo el consejo de Arquímedes, quemaron un buque de madera de los romanos dirigiendo al mismo los rayos solares reflejados de los escudos planos? Adoptar el diámetro del escudo D = 1 m, el número de los combatientes n = 100, la distancia al buque l = 20 m.

Es sabido que en tiempo de sol se logra encender un trozo de madera seca con ayuda de una lente con la distancia focal F = 0,1 m y el diámetro d = 3 cm. El tamaño angular del Sol se toma igual a $\alpha = 0{,}01$ rad.

RONDA EXPERIMENTAL

329. (8vo grado). 1. Proponer el método de medición del rendimiento del plano inclinado con ayuda de un dinamómetro y una regla.

2. Experimentalmente estudiar la dependencia entre el rendimiento del plano inclinado y su altura y construir el gráfico de esta dependencia.

3. Comparar la dependencia experimental obtenida entre el rendimiento del plano inclinado y su altura con la teórica.

Aparatos y materiales: plano inclinado, barra, dinamómetro, regla de medición, papel milimetrado.

330. (8vo grado). Determinar la densidad del líquido dado.

Aparatos y materiales: vasija con el líquido dado, vasija con agua, regla de medición, dos barras metálicas, palanca.

331. (9no grado). Determinar la tensión superficial del líquido dado utilizando el líquido cuya tensión superficial es conocida.

Aparatos y materiales: capilar, regla de medición, palanca, dos pesas metálicas, vasija con un líquido cuya tensión superficial es conocida, vasija con el líquido a investigar.

332. (9no grado). 1. Estudiar con ayuda de un manantial regulable de corriente continua y dos lámparas de incandescencia el principio de funcionamiento de la "caja negra".

2. A base de los resultados obtenidos durante el cumplimiento de la

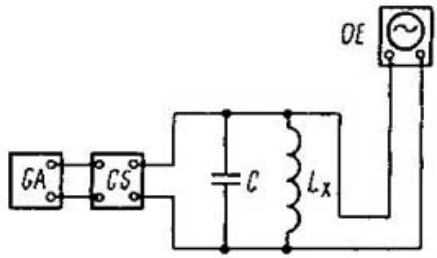


Fig. 124

tarea 1 trazar el curso aproximado de la característica de voltios-amperios de la "caja negra".

Aparatos y materiales: "caja negra", dos lámparas de incandescencia (6,3 V; 0,3 A), manantial de corriente continua (la tensión máxima es 12 V), reóstato, conductores de conexión.

Nota. Para regular la tensión en un margen amplio utilizar el potenciómetro. Tomar las siguientes medidas de precaución:

a) no conectar la "caja negra" directamente a los bornes de la tensión regulable;

b) tener en cuenta que la tensión máxima del manantial de corriente es de 12 V, mientras que las lámparas están calculadas para la tensión nominal de 6,3 V.

333. (10mo grado). 1. Estudiar el funcionamiento del convertidor de señales CS y establecer cómo varía en el mismo la señal sinusoidal que se aplica a su entrada de la salida del generador acústico.

2. Determinar la inductancia L_x de la bobina observando en la pantalla del oscilógrafo las oscilaciones amortiguadas en el circuito resonante paralelo CL_x (fig. 124).

3. Conectar en lugar del circuito resonante un altavoz dinámico y obtener en la pantalla un oscilograma similar al obtenido en la tarea 2. Explicar el resultado obtenido.

Aparatos y materiales: generador acústico GA, convertidor de señales CS, oscilógrafo electrónico OE, circuito resonante paralelo CL_x, altavoz dinámico AD, microcalculador, conductores.

334. (10mo grado). 1. Proponer los métodos de construcción de la trayectoria de los rayos en una placa rectangular transparente y de medición de los ángulos de refracción ρ para distintos ángulos de incidencia α valiéndose sólo del papel milimetrado.

2. Experimentalmente estudiar las dependencias entre el ángulo de refracción β y el ángulo de incidencia α y construir el gráfico correspondiente.

3. Utilizando los resultados obtenidos al cumplir la tarea 2 determinar: a) el coeficiente de refracción del material del que está hecha la placa rectangular transparente;

b) el ángulo de refracción β con el ángulo de incidencia $\alpha = 90°$.

Aparatos y materiales: placa rectangular transparente, papel milimetrado, microcalculador.

SOLUCIONES

1. Al suspender el primer peso el muelle se alarga en

$$\Delta l = \frac{mg}{k},$$

o sea cada mitad del muelle se alarga en

$$\Delta l = \frac{mg}{2k}.$$

Al suspender el segundo peso la longitud de la mitad inferior no cambia. Pero el alargamiento de la mitad superior del muelle aumenta dos veces y llega a ser igual a $2\frac{mg}{2k}$ ya que la fuerza de tensión de esta parte del muelle crece dos veces. De este modo, el alargamiento de todo el muelle llega a ser igual a

$$\frac{mg}{2k} + \frac{mg}{k} = \frac{3}{2}\frac{mg}{k},$$

y la longitud del muelle será

$$l_0 + \frac{3}{2}\frac{mg}{k}.$$

2. Ya que en el sentido horizontal en el sistema no actúan ningunas fuerzas exteriores, el centro de masas del sistema (bolita media) se mueve verticalmente. Esto significa que en el momento, cuando la bolita superior toca la superficie, la velocidad de la inferior es igual al cero, mientras que la velocidad de la bolita superior está dirigida verticalmente y por el módulo es dos veces mayor que la velocidad de la bolita media. Notemos que aunque el movimiento del sistema en el caso, cuando la bolita inferior está fijada, difiere del caso, cuando la misma no está fijada, la conclusión obtenida sobre la relación de las velocidades de las bolitas queda justa. Por ello en ambos casos, según la ley de conservación de la energía

$$mg\frac{l}{2} + mgl = \frac{mv^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{v}{2}\right)^2,$$

en donde m es la masa de cada una de las bolitas.

De ahí

$$|\vec{M}| = v = 2\sqrt{\frac{3}{5}gl}$$

3. La corriente eléctrica se "estiende" simétricamente fuera del cable caído a todas direcciones. Es evidente que la tensión entre dos puntos depende de la diferencia de las distancias de estos puntos hasta el cable. El hombre, acercándose al cable caído, cierra consigo un sector de tierra cuya resistencia es mucho mayor que la resistencia del hombre. Si el hombre hace un paso grande, la tensión entre los puntos en los que se hallan sus pies puede resultar considerable y por el hombre fluirá corriente peligrosa para la vida.

4. Con la aceleración máxima posible a de la barreta el cubo se apoya en el mismo en el punto 0. En este punto (fig. 125) sobre el cubo actúa la fuerza de reacción $\vec{N}$ de la barreta y la fuerza horizontal $\vec{F}_1$ que comunica a la barreta la aceleración a. Es evidente que

$$\vec{F}_1 = m\vec{a} \text{ y } \vec{N} + m\vec{g} = 0.$$

Para que el cubo no gire la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el mismo debe pasar por el centro de masas del cubo. Esto significa que $\alpha = 45°$, o sea $F_1 = N$, o

$$ma = mg.$$

De ahí

$$a = g$$

Para que la barreta y el cubo se muevan con tal aceleración horizontal sobre la barreta ha de actuar la fuerza

$$\vec{F} = (M + m)\vec{a},$$

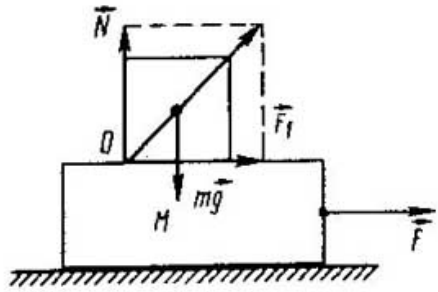


Fig. 125

o (por el módulo)

$$F = (M + m)\, g.$$

5. De la ley de conservación de la energía se infiere que en el momento, cuando el péndulo pasaba la posición de equilibrio, su energía eléctrica era igual a mgl:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl.$$

De ahí

$$v = \sqrt{2gl},$$

en donde l es la longitud del péndulo. A continuación el péndulo va a moverse como si el punto de suspensión se halle en reposo y la fuerza de gravedad sea igual a $m(\vec{g} - \vec{a})$. Con la desviación máxima del péndulo (fig. 126) su energía potencial en este caso sería igual a

$$m(g + a)h,$$

en donde $h = l(1 - \cos \alpha)$. De la ley de conservación de la energía se infiere que

$$m(g + a)h = \frac{mv^2}{2},$$

ó

$$(g + a)\, l\, (1 - \cos \alpha) = gl.$$

De ahí

$$\cos \alpha = \frac{a}{g + a}.$$

6. Ante todo hallemos las aceleraciones de las barras. Para ello anotemos las ecuaciones de su movimiento:

$mg - T = ma$ – para la barra vertical,
$T = ma$ – para la barra horizontal.

De ahí

$$a = \frac{g}{2}.$$

Con tal aceleración se mueven también los electrones en las barras. Ello es posible si en las barras surjan los campos magnéticos (fig. 127) cuyas intensidades E_1 y E_2 satisfacen las condiciones:

$$eE_1 = m_e \frac{g}{2},$$

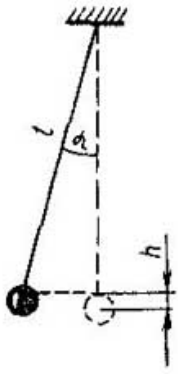


Fig. 126

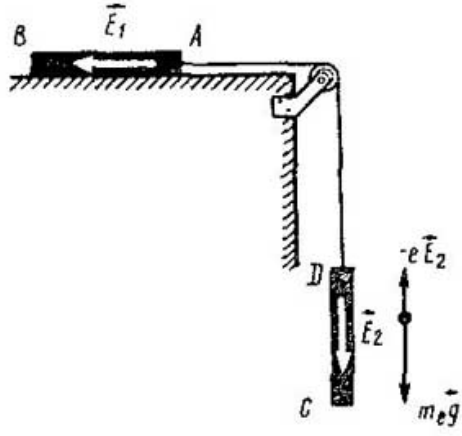


Fig. 127

$$m_e g - E_2 e = m_e \frac{g}{2},$$

en donde m_e es la masa del electrón y e, el módulo de su carga.

De estas ecuaciones hallamos:

$$E = E_1 = E_2 = \frac{m_e g}{2e}.$$

Ya que los campos eléctricos en las barras son homogéneos

$$U_{AB} = U_{CD} = El = \frac{m_e g}{2e} l.$$

7. Sobre el cubo actúan tres fuerzas: la fuerza de gravedad y dos fuerzas de reacción de los planos. En el caso del equilibrio las líneas de acción de estas fuerzas han de intersecarse en un punto (de otra forma la suma de los momentos de fuerzas respecto al eje que pasa por el punto de intersección de dos fuerzas no será igual al cero). Esta condición se satisface en dos casos mostrados en la figura 128. Una de las posiciones señaladas de equilibrio del cubo es estable, mientras que la otra inestable. En la posición del equilibrio estable la energía potencial del cubo debe ser la mínima. En el caso mostrado en la figura 128, a, la altura del centro de masas es igual a

$$h_1 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg} 30° + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} + 1) \approx 1{,}36a.$$

En el caso mostrado en la figura 128, b tenemos:

$$h_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg} 30° = \frac{a}{2}\sqrt{6} \approx 1{,}25a.$$

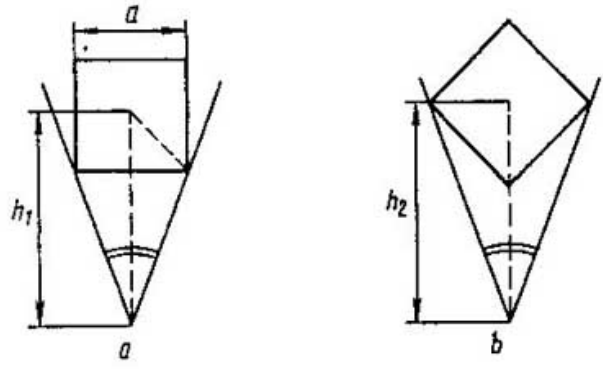


Fig. 128

Consiguientemente, es estable la posición mostrada en la figura 128, b. A tal conclusión se puede llegar examinando los momentos de la fuerza de gravedad y de la resultante de las fuerzas de reacción de los planos y tomando en consideración que el punto de aplicación de esta resultante se halla en el punto de intersección de las fuerzas de reacción.

8. Es cómodo copiar el esquema como se muestra en la figura 129, a. De la simetría del esquema se desprende que la diferencia de potenciales de las placas del condensador C_3 es igual al cero. Por consiguiente, este condensador no está cargado y puede ser extraído (fig. 129, b). La capacidad del sistema resultante la es fácil de hallar. Es igual a 2C.

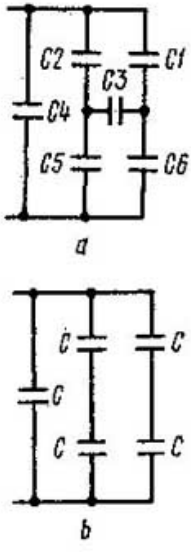


Fig. 129

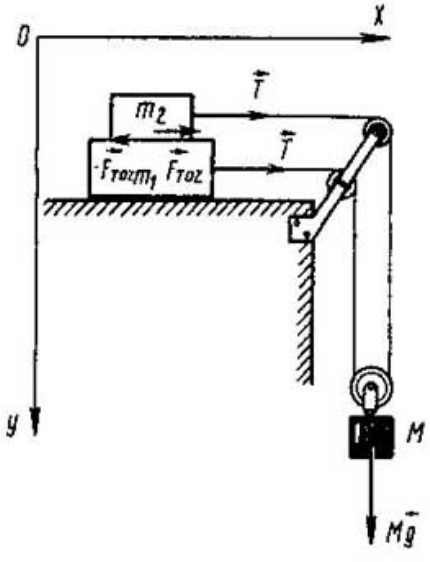


Fig. 130

9. Anotemos las ecuaciones de movimiento de las barretas en la proyección sobre los ejes X y Y (fig. 130):

$$(m_1 + m_2)\,g - 2T = (m_1 + m_2)\,a,$$
$$T - F_{roz} = m_1 a_1, \qquad (1)$$
$$T + F_{roz} = m_2 a_2.$$

Estas ecuaciones son justas tanto para el caso del resbalamiento de las barretas como en caso de no haberlo. La dirección de la fuerza $\vec{F}_{roz}$ no está predeterminada, es importante sólo que en dos últimas ecuaciones los signos delante de F_{roz} son diferentes en conformidad con la tercera ley de Newton.

Si el resbalamiento falta, $a_1 = a_2$ y F_{roz} es la fuerza de rozamiento de reposo la que puede tomar los valores de 0 hasta $\mu m_2 g$:

$$F_{roz} \leqslant um_2 g. \qquad (2)$$

Es evidente que el resbalamiento comenzará tan pronto como F_{roz} llegue a ser igual a $\mu m_2 g$. Suponiendo que en el sistema de ecuaciones obtenidas $a_1 = a_2 = a$ hallemos F_{roz} en ausencia del resbalamiento. Primero, al sumar todas las ecuaciones, hallamos la aceleración:

$$a = \frac{g}{2}.$$

Seguidamente, de la primera ecuación obtenemos:

$$T = \frac{1}{4}\,(m_1 + m_2)\,g.$$

Y por último, cualquiera de dos ecuaciones restantes permite hallar la fuerza de rozamiento:

$$F_{roz} = (m_2 - m_1)\frac{g}{4}$$

Sustituyendo esta formula por F_{roz} en la desigualdad (2) obtenemos:

$$\left|(m_2 - m_1)\frac{g}{4}\right| \leqslant um_2 g,$$

ó

$$\left|1 - \frac{m_1}{m_2}\right| \leqslant 4\mu.$$

10. Puede acusar cualquiera. La respuesta depende del hecho si están acoplados los demás bornes de las dinamos y a dónde están acoplados.

11. Veamos el sistema en el momento, cuando el muelle por primera

vez se extendió hasta la longitud que tiene en el estado no deformado. La fuerza de reacción del tope en este momento llega a ser igual al cero. Ello significa que en este momento en el sistema dejan de actuar las fuerzas exteriores y el centro de gravedad del sistema posee una velocidad determinada $\vec{v}_0$ que se conserva ulteriormente. En el sistema de coordenadas con el origen en el centro de gravedad del sistema en el momento examinado los cubos se mueven desde el origen de coordenadas con iguales y opuestamente dirigidas velocidades $\pm v_0$ y a continuación oscilan con la frecuencia que depende de la rigidez del muelle y las masas de los cubos. Con ello, cada uno de los cubos oscila como si estuviese fijado a un muelle aparte, cuya longitud es dos veces menor que la longitud del muelle dado y la rigidez, consiguientemente, dos veces mayor.

12. Al disminuir la longitud de la cuerda en Δl la longitud de toda la suspensión disminuirá en $3\Delta l$ y, consiguientemente, el centro de gravedad subirá $1{,}5\,\Delta l$. El trabajo de la fuerza de tensión de la cuerda $T \cdot \Delta l$ debe ser, por lo visto, igual a la variación de la energía potencial del sistema:

$$T \cdot \Delta l = 1{,}5\ mg \cdot \Delta l,$$

de ahí

$$T = 1{,}5\ mg.$$

13. Es preciso sumergir el polvo en un líquido con el mismo índice de refracción que el vidrio. Entonces el polvo dejará de dispersar la luz de manera difusa (equitativamente a todas las direcciones) y va a portarse como un vidrio entero.

14. Conectar entre sí tres conductores en el tercer piso; en el cuarto piso identificar el cuarto conductor (dos operaciones). Luego conectar con él uno de tres conductores restantes y cerrar dos restantes. En el tercer piso identificar el segundo conductor (dos operaciones). Por último, conectar uno de los conductores restantes con uno de los identificados. En el cuarto piso determinar, ¿cuáles extremos pertenecen a los conductores restantes (una operación)? En total, hace falta hacer cinco operaciones.

15. La resistencia de la bombilla de linterna de bolsillo es igual a

$$r = \frac{3{,}5}{0{,}28}\ \text{Ohms} = 12{,}5\ \text{Ohms},$$

mientras que la resistencia de la bombilla de 60 W de potencia es igual a

$$R = \frac{(220)^2}{110}\ \text{Ohms} = 440\ \text{Ohms}.$$

En el caso de la conexión en serie de las bombillas en la red por las mismas fluirá la corriente

$$I = \frac{220}{452{,}5} A = 0{,}49\ A$$

y la potencia de la bombilla de linterna de bolsillo será igual a

$$p = I^2 r \approx 3{,}1\ W.$$

Pero la bombilla está calculada para la potencia

$$P_0 = 0{,}28 \cdot 3{,}5\ W \approx 1\ W.$$

Por ello la bombilla se quema.

16. El momento de la fuerza $\vec{T}$ de tensión de la cuerda respecto al punto 0 de roce de la bobina con la superficie de la mesa está dirigido en el sentido de giro de las agujas de reloj (fig. 131). Por consiguiente, la bobina rodará a la derecha. Si la línea de acción de la fuerza $\vec{T}$ pasa a la derecha del punto 0, la bobina rodará a la izquierda.

17. Durante la carrera el centro de gravedad del hombre baja y sube. La subida del centro de gravedad se efectúa merced al trabajo de los músculos de hombre. La fuerza de elasticidad de los músculos debe ser igual a mg (en donde m es la masa del hombre). Ya que la potencia del hombre es reducida, la velocidad de desplazamiento del centro de masas y, consiguientemente, la velocidad de la carrera es pequeña.

Durante el movimiento en la bicicleta los desplazamientos verticales del centro de gravedad del hombre son pequeños; asimismo es pequeña la fuerza de rozamiento. Por ello, la velocidad de movimiento puede ser grande.

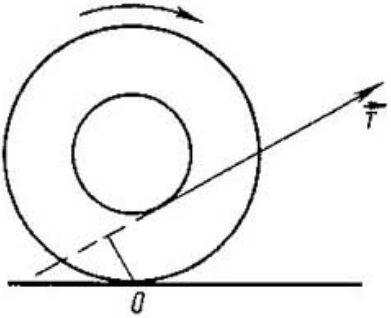


Fig. 131

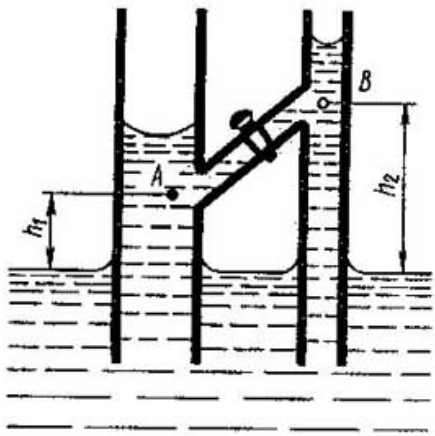


Fig. 132

18. En el punto A (fig. 132) la presión es menor que la atmosférica en la magnitud $\rho g h_1$ y en el punto B, en la magnitud $\rho g h_2$. Por ello

$$p_A = p_0 - \rho g h_1,$$

$$p_B = p_0 - \rho g h_2.$$

Consiguientemente,

$$p_A - p_B = \rho g (h_2 - h_1),$$

o sea la presión en el punto A es mayor que la presión en el punto B en $\rho g \Delta h$ (en donde $\Delta h = h_2 - h_1$). Esta diferencia asegura el equilibrio de la columna de líquido en el tubo de unión, cuando el grifo se halla abierto.

19. Analicemos primero la colisión elástica de la bolita con la pared. La velocidad $\vec{v}$ de la bolita puede ser presentada como suma de dos componentes de los vectores (fig. 133): $\vec{v}_1$, paralelo a la pared, y $\vec{v}_2$, perpendicular a la misma. Al chocar la bolita con la pared el vector $\vec{v}_1$ permanece invariable, mientras que el vector $\vec{v}_2$ cambia su dirección en la opuesta. Por ello la vedocidad $\vec{v}_1$ de la bolita después del choque será igual a la suma de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Analicemos ahora el movimiento de la bolita lanzada al rincón de la habitación. Representemos la velocidad v de la bolita como suma de tres vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ cada uno de los cuales es perpendicular a uno de tres planos I, II y III recíprocamente perpendiculares, formados por el piso y las paredes (fig. 134):

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3.$$

Después del choque con el plano I la componente de $\vec{v}_1$ cambia en la opuesta, mientras que las de $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ permanecen las mismas. La velocidad de la bolita llega a ser igual a

$$\vec{v}' = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3.$$

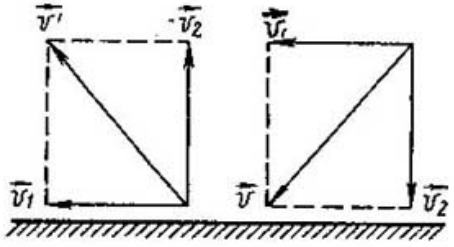


Fig. 133

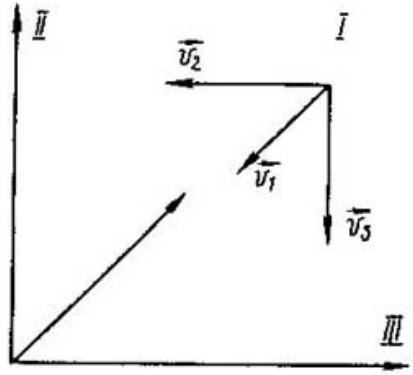


Fig. 134

Después del choque con el plano II la velocidad de la bolita llega a ser igual a

$$\vec{v}'' = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

Y, por último, al chocar con el plano III la bolita rebota en dirección opuesta a la que había sido lanzada:

$$\vec{v}''' = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = -\vec{v}$$

Por las mismas razones los rayos de luz que caen sobre tres espejos recíprocamente perpendiculares siempre reflejan en sentidos opuestos. En esta propiedad del "reflector angular" (sistema de espejos recíprocamente perpendiculares) se basa la estructura de los reflectores de automóviles (catafaros). Un tal sistema de espejos fue traído a la Luna y se utilizaba con fines de la localización laser de la Luna.

20. El estado del cuerpo al cero absoluto es un estado separado con la energía cinética mínima de moléculas. Tal estado debe ser uno solo. En cuanto a los estados no cristalinos del sistema con la energía dada los hay siempre una multitud. Estos estados se diferencian por la disposición de las partículas.

21. Pasemos al sistema de lectura relacionado con el pie del futbolista. En este sistema de lectura el balón que se halla en reposo respecto a la tierra tropieza con el pie con cierta velocidad.

Si en el golpe no tiene lugar pérdida de energía, el balón se separa volando con la misma velocidad y, por consiguiente, su velocidad respecto a la tierra es igual a la velocidad duplicada del pie. Las pérdidas de energía tienen por efecto la disminución de la velocidad del balón. En el caso del golpe absolutamente inelástico la velocidad del balón es igual a la velocidad del pie y entonces la distancia de vuelo del balón es aproximadamente 4 veces menor que la distancia de su vuelo en el caso del golpe absolutamente elástico.

Analicemos a qué se deben las pérdidas de energía. Con el golpe las deformaciones de la bota y del balón son elásticas (con tal de que el balón no esté inflado demasiado flojo), ya que después del mismo tanto la bota como el balón restablecen su forma. Pero el balón y la bota pueden restablecer su forma de manera no simultánea, y entonces el balón rebotará sin recibir toda la energía potencial de deformación reservada durante el golpe.

22. La fuerza de rozamiento durante el movimiento de la moneda será dirigida en el sentido opuesto a la velocidad de la misma. Por ello, cuando la moneda se pone en movimiento, la suma de las fuerzas que actúan sobre la moneda proyectadas sobre el eje dirigido a lo largo del plano inclinado (en el sentido del descenso) no será igual al cero. Esto causará que la moneda va a deslizar acercándose a la base del plano inclinado.

23. Las cargas de cada uno de los planos crean un campo electrostá-

tico homogéneo de la intensidad $\vec{E}$ dirigida perpendicularmente al plano. El módulo de la intensidad se define por la fórmula

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

en donde σ es la densidad de las cargas. Con arreglo al principio de superposición el campo de ambos planos también es homogéneo y la intensidad del mismo es igual a la suma vectoral de intensidades de los campos de las placas; la resultante es dirigida paralelamente a la bisectriz del ángulo formado por los planos. En tal campo las partículas cargadas se mueven igual que los cuerpos en el campo de la fuerza de gravedad: por las parábolas cuyos ejes de simetría son paralelos a la bisectriz del ángulo formado por los planos.

24. Es más fácil llegar a comprender cómo se transmite la energía examinando qué se realiza con el aumento de la velocidad de rotación de la polea conductora. En efecto, entonces la polea comunica cierta aceleración a los tramos más próximos de la correa y la deformación de la misma crece. Crece también la fuerza de tensión de la correa. Esto hace que comienzan a tener aceleración los tramos consecuentes de la correa y así sucesivamente. Por la correa se mueve la onda de deformación de la polea conductora a la conducida. Si c es la velocidad del sonido en la correa (con tal velocidad se propaga la perturbación elástica en la correa inmóvil) y v, la velocidad de movimiento de la correa, c – v es la velocidad de propagación de la onda de deformación de la polea conductora a la conducida.

25. Cuando un pez es examinado desde un puente, los rayos de luz que van del mismo atraviesan la superficie de agua casi perpendicularmente. En este caso la luz se refleja de manera insignificante de la superficie de agua y por ello el flujo luminoso, que va del pez, es relativamente grande. Si el pez se observa desde una orilla baja, los rayos que van del pez al observador forman un ángulo grande con la normal a la superficie y una gran parte del flujo luminoso se refleja de la misma.

Además de ello, en el ojo del observador dan los rayos de sol que crean el fondo deslumbrador. Durante la observación desde el puente en el ojo dan aquellos rayos que caen sobre la superficie de agua y se reflejan de la misma bajo un ángulo casi recto. Estos rayos se reflejan de manera relativamente débil y crean un fondo poco brillante. Al contrario, el reflejo de los rayos que caen sobre la superficie bajo un ángulo grande es considerable y al observar al pez desde la orilla la luz solar crea un fondo vivo que perjudica las condiciones de observación del pez.

26. Ya que el sistema de transformadores no está cargado, él no consume energía de la red (consideramos que los transformadores son ideales). Ello significa que la suma de las FEM que surgen en los arrollamientos del transformador conectado a la red es igual a la tensión de la red U_0:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = U_0. \tag{1}$$

Pero la FEM $\mathcal{E}$ que surge en el arrollamiento es proporcional al número de espiras n y la velocidad de variación del flujo magnético. El flujo magnético, a su vez, también es proporcional al número de espiras. De este modo $\mathcal{E} \sim n^2$. Consiguientemente, $\mathcal{E}_1 \sim n_1^2$, $\mathcal{E}_2 \sim n_2^2$. Por ello

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} = k^2. \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{k^2}{1+k^2} U_0, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{1+k^2} U_0. \tag{3}$$

Las tensiones U_1 y U_2 en los arrollamientos secundarios del sistema son iguales a:

$$U_1 = \frac{1}{k} \mathcal{E}_1 = \frac{k}{1+k^2} U_0,$$

$$U_2 = k\mathcal{E}_2 = \frac{k}{1+k^2} = U_0. \tag{4}$$

Por ello, si estos arrollamientos están conectados como se muestra en la figura 135, a

$$U = U_1 + U_2 = 2\frac{k}{1+k^2} U_0 = 60 \text{ V};$$

pero si los arrollamientos están conectados según el esquema reproducido en la figura 135, b, entonces

$$U = U_1 - U_2 = 0.$$

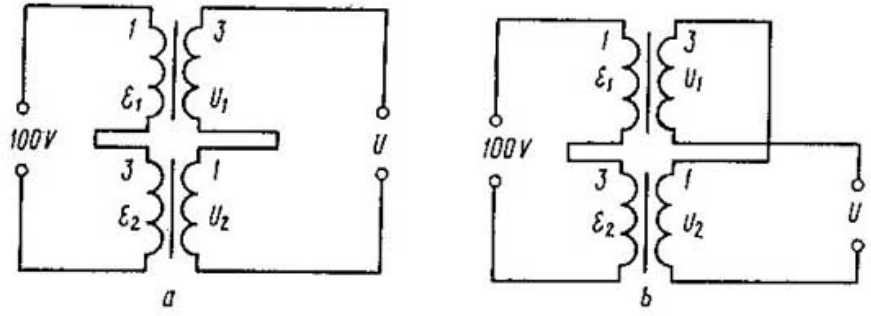


Fig. 135

27. La cantidad del calor Q_1 que la varilla adquiere de la llama es proporcional al área S de la superficie de la varilla y a la diferencia de temperaturas de la misma y de la llama:

$$Q \sim (T_{ll} - T_{var})\, S = 2\pi r l\, (T_{ll} - T_{var}),$$

en donde r es el radio de la varilla, l, la longitud del tramo calentado. Pero la cantidad del calor que se deriva del lugar calentado es proporcional a la superficie de la sección transversal y a la diferencia de temperaturas entre la varilla calentada y el aire interior:

$$Q_2 \sim (T_{var} - T_0)\, S = \pi r^2\, (T_{var} - T_0).$$

Con el equilibrio térmico $Q_1 = Q_2$. De aquí se desprende que

$$\frac{T_{ll} - T_{var}}{T_{var} - T_0} = \alpha \frac{r}{l}$$

en donde α es el coeficiente de proporcionalidad. Utilizando las propiedades de proporciones obtenemos:

$$\frac{T_{ll} - T_{var}}{T_{ll} - T_0} = \frac{\alpha r}{l + \alpha r},$$

de donde

$$T_{var} = T_{ll} - \frac{\alpha r}{l - \alpha r}\, (T_{ll} - T_0).$$

De esta fórmula se deduce que cuanto mayor es r tanto menor es la temperatura de la varilla.

28. La membrana se atrae a la bobina independientemente de cuál polo del imán eléctrico da hacia la membrana. Por ello, si el imán permanente no estuviese presente, la frecuencia de vibraciones de la membrana de auricular sería dos veces mayor que la frecuencia de oscilaciones de la corriente que alimenta al auricular, o sea la frecuencia de la señal transmitida.

Se puede pasar sin el imán permanente conectando en el circuito de la bobina del imán eléctrico un manantial de corriente continua. Con ello, el valor de amplitud de la intensidad de corriente de la señal debe ser menor que la componente constante de la corriente.

29. La indicación del termómetro se determina por la irradiación del satélite, de las estrellas, de los planetas y del propio termómetro y es igual a su temperatura "equiponderante".

30. Si un hombre corre por la superficie del hielo, el tiempo en el curso del cual se halla en algún tramo del mismo es corto. A efecto de la inercia el hielo no llega en este tiempo a combarse tanto hasta que se destruya. Pero si el hombre se halla parado sobre el hielo, la combadura

del mismo se determina sólo por el peso del hombre; con ello éste puede ser bastante grande y el hielo se destruye.

31. En el sistema de coordenadas, que se mueve respecto a la superficie de la mesa con la misma velocidad $\vec{v}$ que la tabla, la tiza tiene su propia velocidad $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$. Ya que la fuerza de rozamiento está dirigida en el sentido opuesto al vector $\vec{u}'$ la dirección de la velocidad de la tiza no va a variar. Va a cambiar sólo el valor absoluto de la velocidad de la tiza. Esto significa que la tiza trazará una línea recta que va bajo el ángulo $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$ al vector $\vec{v}$ (fig. 136).

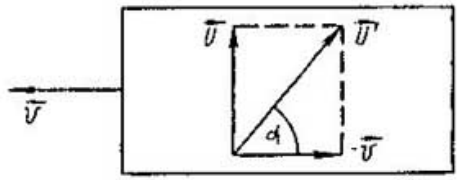


Fig. 136

32. Al parecer la velocidad del sputnik, tras conectado el motor, debe crecer. Sin embargo, no es así. La velocidad del sputnik disminuye. Demostremos ello.

Designemos con R el radio de órbita del sputnik. Ya que la dependencia entre la fuerza de gravitación y la distancia entre cuerpos es análoga a la dependencia entre la fuerza de interacción de las cargas puntuales contrarias, en analogía con el campo eléctrico para la energía potencial del sputnik se puede anotar

$$W = -G\frac{Mm}{R},$$

en donde M es la masa de la Tierra y m, la masa del sputnik.

La energía cinética del sputnik es

$$W_c = \frac{mv^2}{2}.$$

Ya que la aceleración centrípeta se comunica al satélite por la fuerza de gravitación

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}.$$

Por ello, para la energía cinética del sputnik obtenemos:

$$W_c = \frac{mv^2}{2} = G\frac{Mm}{2R}$$

De aquí se desprende que la energía cinética del sputnik es dos veces

menor que el valor absoluto de la energía potencial. Pero la energía total del sputnik es igual a la suma de las energías cinética y potencial:

$$W = -G\frac{Mm}{R} + G\frac{Mm}{2R} = -G\frac{Mm}{2R} = -W_c.$$

Una vez puesto en marcha el motor, la energía del sputnik varía en la magnitud de trabajo A del motor y será igual a

$$W' = -G\frac{Mm}{2R'} = -G\frac{Mm}{2R} + A.$$

De esta igualdad se deduce que

$$G\frac{Mm}{2R'} < C\frac{Mm}{2R},$$

o sea la energía cinética del sputnik disminuye, mientras que el radio de la órbita crece:

$$R' > R.$$

La velocidad del sputnik disminuirá y él pasará a la órbita con un radio medio mayor. Por consiguiente, el segundo sputnik, después de puesto en marcha el motor, comenzará a rezagar del primero.

33. Tanto en la calle como en la cocina con la ventanilla cerrada el vapor está saturado. Pero la temperatura en la calle es inferior que en el local. Por consiguiente, la presión de vapor en la calle es menor que en la habitación. Por ello, al abrir la ventanilla en la cocina el vapor va a salir de la misma a la calle, debido a lo cual el vapor que se halla en la cocina estará siempre insaturado. La ropa se secará más rápido.

34. Para que el palo se mantenga en equilibrio hace falta, en caso de desviarse el mismo de la posición de equilibrio, o sea desplazarse a cierto ángulo, llegar a correr el dedo de modo que el palo vuelva a situarse en la posición de equilibrio. El palo largo va a desviarse más lento que el corto ya que su centro de gravedad se halla más alto.

Para convencerse de ello analicemos cómo depende el tiempo de caída de una varilla liviana con una bola pesada fijada en su extremo de la longitud de la varilla.

Supongamos que el palo hubiese virado al ángulo α (fig. 137). El centro de gravedad del palo ha bajado con ello a la altura

$$h = l(1 - \cos\alpha),$$

en donde l es la longitud del palo. Con arreglo a la ley de conservación de la energía

$$\frac{mv^2}{2} = mgh,$$

ó

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos \alpha).$$

De ahí obtenemos:

$$\omega = \frac{v}{l} = \sqrt{\frac{2g\,(1 - \cos\ \alpha)}{l}},$$

o sea la velocidad angular ω del palo es inversamente proporcional al raíz cuadrado extraído de la longitud del palo. Esto significa que el palo largo va a caer más tiempo que el corto. Por ello es más fácil mantener en equilibrio el palo largo que el corto.

35. Para mantener el equilibrio montando la bicicleta es preciso atenerse a la siguiente regla: perdiendo el equilibrio o al inclinarse a algún lado hace falta virar siempre el timón en el sentido de la caída. Yendo "sin manos" esto se logra a efecto de que el eje de la rueda, y merced a ello asimismo el centro de masas de la horquilla y de la rueda de la bicicleta, se halla algo delante del eje del timón (fig. 138).

Con objeto de virar "sin manos", por ejemplo, a la derecha hace falta doblar el cuerpo de tal modo que la bicicleta se incline a la derecha. La rueda delantera junto con el timón de la bicicleta girará en el sentido de las agujas de reloj y la bicicleta virará a la derecha.

36. Merced a la longitud diferente de los hilos que van del cordel principal a las puntas del cometa de papel, el último es estable respecto al giro alrededor de los ejes OO' y O_1O_1' (fig. 139). La cola facilita la estabilidad del cometa de papel respecto a la rotación alrededor del eje vertical O_2O_2'.

37. Al chocar los cubos se deforman elásticamente e interaccionan con las fuerzas de elasticidad

$$F_x = -ES\frac{x}{a}, \qquad (1)$$

en donde E es el módulo de Young; $S = a^2$, la superficie de la faceta del cubo; a, la longitud de la arista. Ya que

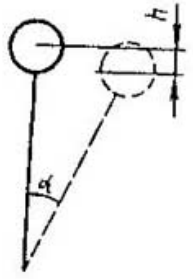


Fig. 137

Fig. 138

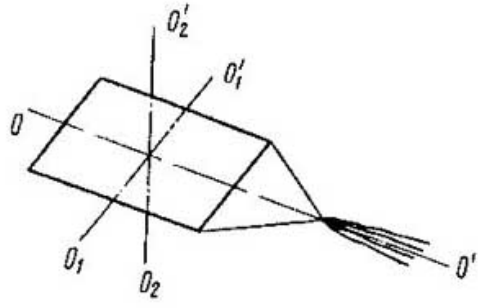


Fig. 139

$$F_x = -kx$$

(en donde $k = Ea$) se puede considerar que durante la colisión los cubos se mueven como péndulos de muelle y el tiempo de colisión es igual a la mitad del período de oscilaciones:

$$t = \frac{1}{2} T = \pi \sqrt{\frac{m}{Ea}}, \qquad (2)$$

en donde $m = \rho a^3$ es la masa del cubo, ρ, su densidad. De ahí

$$t = \pi \sqrt{\frac{\rho a^2}{E}}. \qquad (3)$$

Para los cubos de acero de $a = 5$ cm obtenemos ($E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ H/m^2, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3):

$$t \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

Anotando la expresión (1) hemos supuesto que la deformación relativa del cubo es igual a $\frac{x}{a}$, o sea, se deforma algo como todo el cubo. No siempre es justo. La deformación se propaga en el cubo no de manera instantánea, sino con la velocidad del sonido c, igual para el acero a $6 \cdot 10^3$ m/s. Por ello, la deformación "abarcará" a todo el cubo en el tiempo $\tau \sim \frac{a}{c}$. Por consiguiente, la solución aducida es justa si $\tau \ll t$. En el caso en cuestión $\tau \approx 0{,}8 \cdot 10^{-5}$ s y se puede considerar que la condición $\tau \ll t$ se cumple. Pero si esta condición no está satisfecha (por ejemplo, en caso de chocar las varillas), en vez de a para la fórmula 1 es preciso tomar las dimensiones del área de deformación ct.

38. El diámetro del haz que sale del ocular de telescopio se determina por la fórmula

$$d = D \frac{F_{oc}}{F},$$

en donde F_{oc} es la distancia focal del ocular (fig. 140). Para $F_{oc} = F_1 = 50$ mm obtenemos: $d_1 = 5$ mm; con $F_{oc} = F_2 = 100$ mm tenemos: $d_2 = 10$ mm; por último, con $F_{oc} = F_3 = 25$ mm el diámetro del haz será igual a $d_3 = 2{,}5$ mm. En el primero y en el tercer caso en el ojo da todo el flujo luminoso Fl_0 que llega al objetivo, mientras que en el segundo caso sólo el flujo

$$Fl = \left(\frac{d_0}{d}\right)^2 = \frac{1}{4} Fl_0.$$

El diámetro de la imagen del planeta en el retículo del ojo es igual a $F_{oj} \cdot \alpha$ (en donde F_{oj} es la distancia focal del ojo y α, el diámetro angular

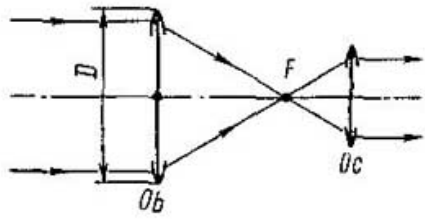


Fig. 140

del planeta observado en el telescopio). Ya que el aumento angular del telescopio es $A = \frac{F_{ob}}{F_{oc}}$ el diámetro angular del planeta en el primer caso es igual a $\alpha_1 = A_1\alpha_0 = 10\,\alpha_0$, en el segundo caso $\alpha_2 = A_2\alpha_0 = 8\,\alpha_0$ y en el tercer caso $\alpha_3 = A_3\alpha_0 = 32\alpha_0$. Las superficies de la imagen del planeta serán respectivamente iguales a:

$$S_1 = \frac{1}{4}\,\pi F_{oj}^2\alpha_1^2 = 64\pi F_{oj}^2\alpha_0^2,$$

$$S_2 = 16\pi F_{oj}^2\alpha_0^2 \text{ y } S_3 = 256\pi F_{oj}^2\alpha_0^2.$$

Tomando en consideración que la iluminación de la imagen es

$$E = \frac{Fl}{S}$$

(en donde Fl es el flujo luminoso que da en el ojo) tenemos:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{Fl_2S_1}{Fl_1S_2} = 1,\ \frac{E_3}{E_1} = \frac{Fl_3S_1}{Fl_1S_3} = \frac{1}{4}.$$

39. En el caso de la rotación uniforme del inducido los momentos de las fuerzas mediante las cuales el campo magnético actúa en los arrollamientos del mismo deben ser iguales en su valor absoluto. Esto significa que son iguales las corrientes que fluyen por los arrollamientos y excitan en éstos las FEM de la inducción $\mathcal{E}$. Por ello

$$I = \frac{U - \mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

De aquí

$$\mathcal{E} = U\frac{R + r}{2R + r}.$$

40. La sustancia en la que no existe interacción entre moléculas constituye un gas ideal y se subordina a la ecuación del estado gaseoso:

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

ó

$$p = \frac{\rho}{M} RT.$$

Sustituyendo aquí los valores de las magnitudes $\rho = 10^3$ kg/m^3, $M = 18 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, $R = 8{,}31$ kg/(mol·K) y $T = 300$K obtenemos:

$$p \approx 1{,}4 \cdot 10^7 \text{ H/m}^2.$$

Esta presión es 140 veces superior a la atmosférica.

41. Examinemos un péndulo matemático cuya frecuencia de oscilaciones menores es igual a ω. Por la fórmula

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

hallamos la longitud L de tal péndulo:

$$L = \frac{g}{\omega^2}.$$

Para las oscilaciones pequeñas se puede considerar que todos los puntos del péndulo se mueven por rectas horizontales. Sea la amplitud de oscilaciones del peso de péndulo tal que el punto A dispuesto a la distancia l del peso oscila con la amplitud a.

Las oscilaciones del péndulo no variarán, por lo visto, si hagamos como punto de suspensión del péndulo el punto A y mantengamos las oscilaciones del mismo tales que sus desplazamientos permanezcan iguales en cada momento de tiempo. Con ello, si $l < L$ (ó $l < \frac{g}{\omega^2}$), entonces según se observa en la figura 141, a

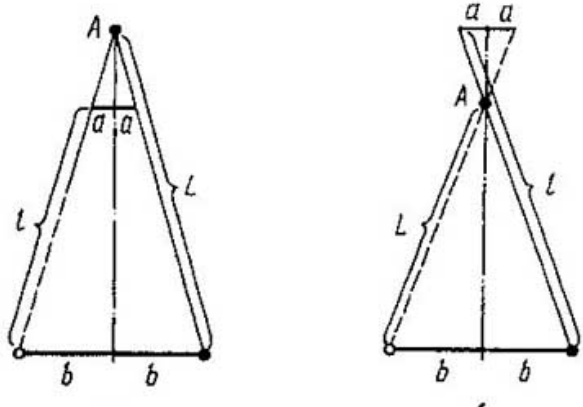


Fig. 141

$$\frac{b}{a} = \frac{L}{L - l},$$

de ahí

$$b = \frac{ag}{g - \omega^2 l}.$$

La fase de oscilaciones del péndulo en este caso es igual a ωt.

Si $l > L$ (fig. 141, b), entoces

$$\frac{b}{a} = \frac{L}{l - L},$$

de ahí

$$b = \frac{ag}{l\omega^2 - g}.$$

En este caso la fase de oscilaciones es igual a $\omega t + \pi$.

42. La posición del centro de gravedad del vaso con agua será la inferior en el caso, cuando coincide con el nivel de agua en el vaso. En efecto, si el centro de gravedad 0 del sistema se halla situado más alto que el nivel de agua en el vaso (fig. 142, a), el mismo bajará al echar agua en el vaso. Pero si el centro de gravedad del sistema se encuentra por debajo del nivel de agua (fig. 142, b), el bajará si se evacúa la parte de agua que está por encima del centro de gravedad.

43. La dirección de rotación puede ser determinada suspendiendo el molino de café en un hilo y poniendo en marcha el motor. El molino de café comenzará a girar en la dirección opuesta a la dirección de rotación del inducido del motor.

44. Los circuitos más simples se ofrecen en la figura 143. Es la estrella (fig. 143, a) y el triángulo (fig. 143, b) constituidos por resistores. En el caso de la estrella

$$R_1 + R_2 = 3 \text{ Ohms},$$

$$R_2 + R_3 = 5 \text{ Ohms},$$

$$R_1 + R_3 = 6 \text{ Ohms},$$

de ahí

$$R_1 = 2 \text{ Ohms},$$

$$R_2 = 1 \text{ Ohm},$$

$$R_3 = 4 \text{ Ohms}.$$

En el caso del triángulo

$$\frac{r_1 (r_2 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3} = 3 \text{ Ohms},$$

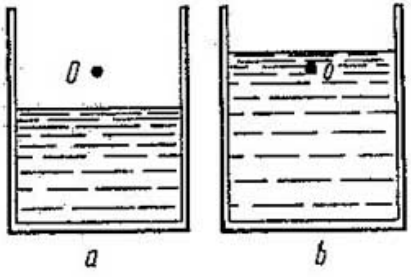


Fig. 142

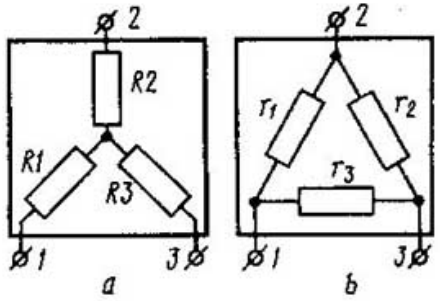


Fig. 143

$$\frac{r_2 (r_1 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3} = 5 \text{ Ohms},$$

$$\frac{r_3 (r_1 + r_2)}{r_1 + r_2 + r_3} = 6 \text{ Ohms},$$

de ahí

$$r_1 = 3{,}5 \text{ Ohms}, \quad r_2 = 7 \text{ Ohms} \quad \text{y} \quad r_3 = 14 \text{ Ohms}.$$

45. Ver la figura 144.

46. En el muelle p – 1 actúa del lado del muelle p la fuerza $\vec{F}$ de elasticidad igual en módulo al peso de p – 1 muelles:

$$F = (p - 1)\, mg.$$

El alargamiento x_p que adquiere el muelle p se expresa así

$$x_p = \frac{F}{k} = \frac{(p - 1)\, mg}{k}$$

El alargamiento de toda la cadena es igual a

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 + \frac{mg}{k} + \ldots + \frac{(n - 1)\, mg}{k} = \frac{n (n - 1)}{2} \frac{mg}{k}.$$

47. Durante el movimiento de la bala en el líquido con una velocidad grande en la bala actúa la fuerza proporcional a la velocidad:

a) en el caso del movimiento en el agua

$$\vec{F}_{res} = -\alpha_1 \vec{v},$$

b) en el caso del movimiento en la miel

$$\vec{F}_{res} = -\alpha_2 \vec{v},$$

donde $\alpha_2 > \alpha_1$.

Repartamos el líquido en finas capas. Al pasar una capa i de espesor x_i, el impulso de la bala variará en

$$|\Delta p_i| = |m \cdot \Delta v_i| = |\vec{F}_{res.med} \cdot \Delta t|.$$

Tal que

$$\Delta t = \frac{x_i}{V_{med}} = \frac{2x}{V_i + V_{i-1}},$$

$$\vec{F}_{res.med} = \frac{\vec{F}_i + \vec{F}_{i-1}}{2} = \alpha \frac{\vec{V}_i + \vec{V}_{i-1}}{2},$$

entonces

$$|\Delta p_i| = \alpha x_i$$

De aquí se desprende que al volar por la caja con el agua el módulo del impulso de la bala variará en

$$\Delta p = \Sigma p_i = \alpha_1 l$$

(en donde l es la longitud de la caja), mientras que al pasar por la caja con la miel el módulo del impulso de la misma variará en

$$\Delta p' = \alpha_2 l.$$

Es evidente que, independientemente de la disposición de las cajas, al atravesar ambas cajas el módulo del impulso de la bala disminuirá en $(\alpha_1 + \alpha_2)\, l$. Por consiguiente, la distancia de vuelo de la bala en ambos casos será igual.

48. En el sistema de coordenadas que se mueve con la misma velocidad que el centro de masas de las pesitas, las últimas vuelan una al encuentro de otra con velocidades iguales en módulo (fig. 145, a). En el

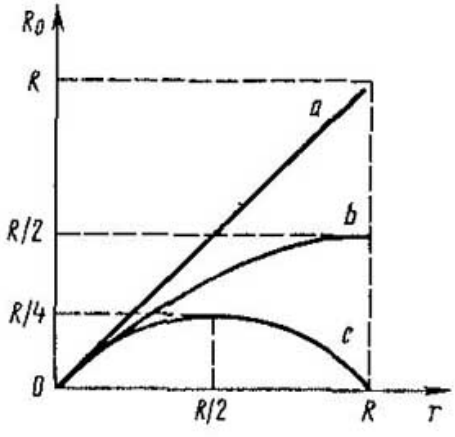


Fig. 144

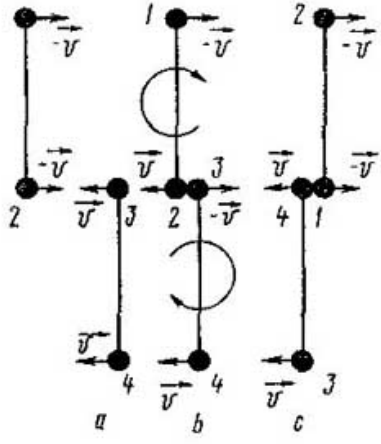


Fig. 145

momento de la colisión de las bolitas 2 y 3 (fig. 145, b) éstas "intercambian" de velocidades y las pesitas se ponen a dar vueltas en torno a sus centros de masas. A continuación se produce la colisión de las bolitas 1 y 4, en la cual ellas "intercambian" de velocidades (fig. 145, c). Después de ello las pesitas van a moverse como se movían antes de la colisión.

49. Anotemos la ecuación de movimiento del cuerpo en la proyección sobre el eje x dirigida verticalmente hacia abajo:

$$Ma = Mg - N - T,$$

en donde $\vec{Mg}$ es la fuerza de gravedad; $\vec{N}$, la fuerza de reacción del soporte y $T = kx$, la fuerza de elasticidad del muelle (x es el alargamiento del muelle). Tomando en consideración que en el momento de desprendimiento del cuerpo del soporte $N = 0$ obtenemos:

$$Ma = Mg - kx.$$

De esta ecuación obtenemos que el cuerpo se desprende del soporte después de que el soporte y el cuerpo hayan pasado la distancia igual a

$$l = x = \frac{M(g-a)}{k}.$$

Por otro lado, ya que el soporte y el cuerpo primero se movían uniformemente acelerados con la aceleración $\vec{a}$,

$$l = \frac{at^2}{2},$$

en donde t es el tiempo a partir del momento inicial de movimiento del soporte hasta el momento, cuando el cuerpo se desprende del mismo. Esto significa que

$$\frac{at^2}{2} = \frac{M(g-a)}{k},$$

de ahí

$$t = \sqrt{2\frac{M}{k}\cdot\frac{g-a}{a}}.$$

Hallemos ahora la extensión máxima del muelle x_0. Utilicemos para ello la ley de conservación de la energía. En el momento de desprenderse del soporte el peso poseía la velocidad

$$V = at = a\sqrt{2\frac{M(g-a)}{ka}}$$

la energía cinética

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{M^2 (g - a) a}{k}$$

y la energía potencial

$$Mg (x_0 - l) = Mgx_0 - \frac{M^2 (g - a) g}{k}$$

(consideramos que la energía potencial del peso es igual al cero, cuando el muelle está extendido al máximo). Ya que en este momento el muelle se halla extendido al largo

$$l = \frac{M (g - a)}{k},$$

su energía potencial es igual a

$$\frac{kl^2}{2} = \frac{M^2 (g - a)^2}{2k}.$$

La suma W_1 de las energías del cuerpo y del muelle es igual a

$$W_1 = Mgx_0 - \frac{M^2 (g - a)^2}{2k}.$$

En el momento, cuando el muelle está extendido al máximo, la velocidad del peso y, consiguientemente, su energía cinética son iguales a cero. Con ello la energía W_2 del peso y del muelle es igual a

$$W_2 = \frac{kx_0^2}{2}.$$

Según la ley de conservación de la energía

$$W_1 = W_2,$$

ó

$$\frac{kx_0^2}{2} - Mgx_0 + \frac{M^2 (g - a)^2}{2k} = 0,$$

de ahí

$$x_0 = \frac{Mg}{x} \pm \frac{M \sqrt{a (2g - a)}}{k}.$$

Pero la extensión máxima x_0 del muelle debe ser mayor que su extensión $x_1 = \frac{Mg}{k}$, hallándose el cuerpo en equilibrio (cuando la fuerza de gravedad Mg está equilibrada por la fuerza de elasticidad del muelle $T = kx$), ya que pasando la posición de equilibrio el cuerpo va a poseer cierta velocidad y obligatoriamente no se detendrá en la misma.

Por consiguiente, de dos raíces de la ecuación debemos tomar la mayor:

$$x_0 = \frac{Mg}{k} + \frac{M\sqrt{a(2g-a)}}{k}.$$

¿Tiene o no el sentido físico el segundo valor de x_0? Sí, pero no origina la extensión máxima, sino la mínima del muelle al oscilar el cuerpo.

La amplitud de las oscilaciones del cuerpo es igual a la semidiferencia de ambas raíces de la ecuación, o sea

$$x_m = \frac{M\sqrt{a(2g-a)}}{k}$$

50. El coeficiente de expansión térmica α es numericamente igual a la tangente del ángulo de inclinación de la tangente al gráfico V (t). Con $t > t_1$ el coeficiente de expansión térmica es constante ($\alpha = \text{const}$) y con $t < t_1$ es proporcional a la temperatura ($\alpha \sim t$). Con $t = t_1$ el valor del coeficiente α experimenta un salto.

51. Disminuyen con el aumento de la temperatura ya que aumenta la energía cinética media de las moléculas.

52. Primero la intensidad de corriente aumenta ya que según la ley de Lenz la FEM de la inducción está dirigida de tal modo que se opone a la disminución del flujo magnético. Al cabo de cierto tiempo el valor de la intensidad de corriente llega a ser equivalente al inicial.

53. En la figura 146 se ve que el rayo de luz atravesando la bola se desvía al ángulo $\varphi = 2(\alpha - \beta)$ (en donde α es el ángulo de caída y β el ángulo de refracción). Si el ángulo de caída del rayo vecino difiere del ángulo de caída de dicho (representado en la figura) rayo en $\Delta\alpha$, entonces el ángulo de refracción difiere en la magnitud $\Delta\beta$. Por ello el rayo vecino se desvía al ángulo $\varphi_1 = 2(\alpha - \beta + \Delta\alpha - \Delta\beta)$. Los rayos permanecen paralelos si $\varphi = \varphi_1$, cosa que es posible con $\Delta\alpha = \Delta\beta$. Tal que $\text{sen}\alpha = n \text{ sen } \beta$, entonces $\cos\alpha \cdot \Delta\alpha = n \cos\beta, \Delta\beta$. A condición de que $\Delta\alpha = \Delta\beta$ tenemos: $\cos\alpha = n \cos\beta$. Esto significa que al mismo tiempo han de realizarse las igualdades:

$$\text{sen}^2\alpha = n^2 \text{sen}^2\beta \text{ y } \cos^2\alpha = n^2\cos^2\beta.$$

Al sumar estas igualdades obtenemos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = n^2(\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta),$$

ó

$$n^2 = 1.$$

De esta manera los haces de luz, al atravesar la bola, pueden seguir siendo paralelos si el índice de refracción es igual a 1.

54. $2\pi\varepsilon_0 ur$.

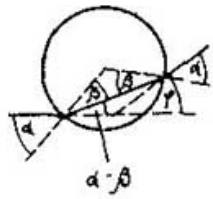


Fig. 146

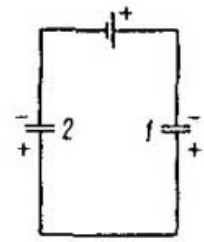


Fig. 147

55. Al cargar cada uno de los condensadores a partir de un manantial hasta la tensión $U = \mathcal{E}$ y conectar en serie el manantial y ambos condensadores se puede obtener la tensión de $3\mathcal{E}$. Pero ésta no es la tensión máxima posible. Probemos que disponiendo de dos condensadores y un manantial se puede obtener la tensión infinitamente próxima a $4\mathcal{E}$.

Conectemos en serie el manantial con uno de los condensadores cargados y el segundo lo cerremos con este par (fig. 147). Designando las cargas en los condensadores, tras ejecutada tal conexión, como q_1 y q_2 y las tensiones en los condensadores como U_1 y U_2 se puede anotar:

$$\mathcal{E} + U_1 = U_2 \qquad (1)$$

La carga sumaria de las placas inferiores (según la figura) de los condensadores es igual a $2C\mathcal{E}$. Esta carga se redistribuye entre las placas, pero no puede variar:

$$q_1 + q_2 = 2C\mathcal{E}. \qquad (2)$$

Solucionando las ecuaciones (1) y (2) en conjunto, hallamos:

$$U_2 = \frac{3}{2}\mathcal{E}.$$

Si ahora repetir esta operación, obtenemos

$$U_2 = \frac{7}{4}\mathcal{E}$$

Efectuando operaciones subsiguientes, obtenemos

$$U_2 \to 2\mathcal{E}.$$

Al conectar ahora en serie el manantial y ambos condensadores, obtendremos la tensión infinitamente próxima a $4\mathcal{E}$.

56. Designemos como T el módulo de la fuerza de elasticidad del hilo y como a el módulo de aceleración de la barreta (fig. 148). Ya que el ángulo α durante el movimiento del sistema permanece invariable la

proyección horizontal de aceleración de la carga también es igual a a. Por lo visto es igual a a también la proyección de aceleración de la carga sobre la dirección del hilo (la variación de la longitud del hilo, que se halla más allá de la polea, siempre es igual al módulo de desplazamiento de la barreta). Por ello

$$mg \cos \alpha - T = ma \quad y$$

$$T \operatorname{sen} \alpha = ma, \tag{1}$$

en donde m es la masa de la carga.

Sobre la barreta con la polea en el punto A actúan dos fuerzas de elasticidad del hilo. Por ello para la barreta se puede anotar la siguiente ecuación (en las proyecciones sobre la dirección horizontal):

$$T - T \operatorname{sen} \alpha = Ma. \tag{2}$$

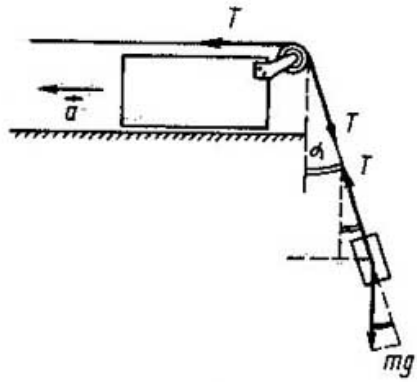


Fig. 148

De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$m = M \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2 \cos \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}.$$

57. Una vez sumergido el cuerpo en el recipiente, la fuerza de presión sobre el fondo del recipiente aumentará en mg. Por otro lado, la presión sobre el fondo del recipiente aumentará en todos los puntos en una misma magnitud $\rho g \Delta h$ a costa de subir en Δh el nivel del líquido en el recipiente (el cuerpo no se hunde y el mismo no "presiona" el fondo del recipiente). Consiguientemente,

$$mg = \rho g \Delta h S.$$

De aquí

$$\Delta h = \frac{m}{\rho S}.$$

58. Enfriándose hasta 0 °C el agua puede despedir cierta cantidad de calor igual a

$$Q_1 = c_1 m_1 t_1 = 3{,}15 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Para calentar el hielo hasta 0 °C es preciso gastar la siguiente cantidad de calor

$$Q_2 = c_2 m_2 (0° - t_2) = 1{,}05 \times 10^4 \text{ J}.$$

Ahora para que se derrita todo el hielo hace falta comunicarle la siguiente cantidad de calor:

$$Q_3 = \lambda m_2 = 1{,}65 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Pero una vez calentado el hielo hasta 0 °C, el agua puede entregar sólo $2{,}1 \times 10^4$ J. Por ello, el hielo no se derretirá del todo y la temperatura de la mezcla, tras establecido el equilibrio térmico, será igual a 0 °C.

59. Cada una de las mitades de la lente funciona como una lente entera con la misma distancia focal y el mismo eje óptico principal. Por eso, después de que la lente es cortada y las mitades resultantes son apartadas, las imágenes del punto luminoso serán dos. Es fácil hallar su posición construyendo el curso de los rayos que van por los focos de las mitades de la lente y por sus centros ópticos O y O' (fig. 149). Cada una de estas imágenes será 2 veces menos clara que la imagen del manantial obtenida con ayuda de la lente entera.

60. La tensión U_2 en el resistor de resistencia r_2 es igual a $U - U_1$ y la intensidad de corriente que fluye por este resistor se determina por la ley de Ohm:

$$I_2 = \frac{U - U_1}{r_2}.$$

Pero

$$I_2 = I_1 + I_v,$$

en donde I_1 es la intensidad de corriente que pasa por el resistor de resistencia r_1, mientras que I_v, la intensidad de corriente que fluye por el voltímetro. Tal que

$$I_1 = \frac{U_1}{r_1},$$

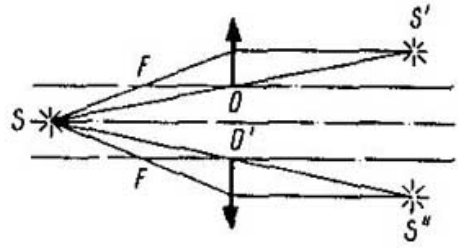


Fig. 149

entonces

$$I_v = I_2 - \frac{U_1}{r_1},$$

de ahí

$$\frac{I_v}{I_2} = 1 - \frac{U_1}{I_2 r_1} = 1 - \frac{U_1 r_2}{(U - U_1) r_1} \approx 0{,}004.$$

61. La variación de la duración del día está relacionada con el ángulo de inclinación del eje terrestre al plano de la órbita de movimiento de la Tierra en torno al Sol igual a 23,5°. Si el eje terrestre fuese perpendicular al plano de la órbita, la duración del día prácticamente no variaría.

La inclinación señalada del eje terrestre no cambia. Y tal que la Tierra gira en torno del Sol, al observarla del Sol su vista sería diferente (fig. 150, a). Esto significa que distintos sectores de la superficie terrestre son iluminados por el Sol en el curso de diferentes lapsos de tiempo. Estos lapsos varían de un día al otro y para cada sector dado de la superficie. Por eso la duración del día es inconstante. Es evidente que en diciembre y en junio, cuando en el hemisferio boreal la duración del día es respectivamente la mínima o la máxima, mientras que el Polo Norte se halla inclinado hacia el Sol o en sentido opuesto, la posición del eje terrestre respecto al Sol cambia muy lentamente. Cambia lentamente también la duración del día. Mientras que en marzo y setiembre la posición del eje varía más rápido; de manera más rápida varía también la duración del día.

El gráfico aproximado de dependencia entre la duración del día y la estación del año se ofrece en la figura 150, b. De manera aproximada es una sinusoide. La velocidad de variación de la duración del día, por lo visto, es proporcional a la tangente del ángulo de inclinación de la tangente al gráfico. En diciembre y en junio esta tangente es casi horizontal (es exactamente horizontal el 22 de junio y el 22 de diciembre), mientras que en marzo y en setiembre su inclinación es la máxima.

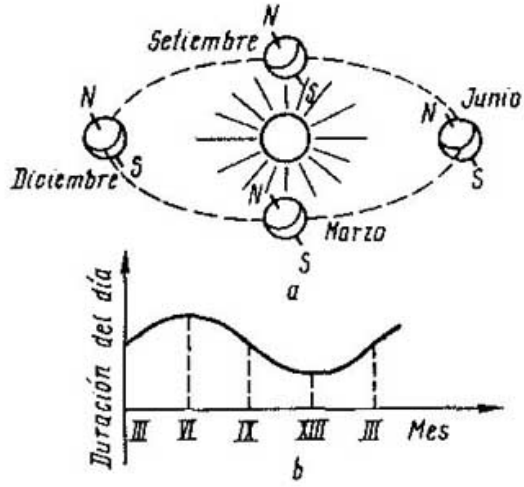


Fig. 150

62. La condición de isotermicidad de la atmósfera en dicho problema no es obligatoria. Es preciso sólo que la temperatura del gas en el aeróstato (se tiene en cuenta el aeróstato de envoltura hermética) y la del aire exterior sean siempre iguales, lo cual, naturalmente, se cumple en el caso de la atmósfera isotérmica.

La fuerza sustentadora F del aeróstato de volumen V se determina por la fórmula

$$F = (\rho_1 - \rho_2)\, gV, \tag{1}$$

en donde ρ_1 es la densidad del aire atmosférico a la altura a la que se encuentra el aeróstato y ρ_2, la densidad del aire que llena el aeróstato.

De la ecuación de Mendeleiev – Clapeyron se desprende que entre la densidad del gas y su presión existe la siguiente relación:

$$p = \frac{\rho}{M} RT.$$

Ya que la envoltura del aeróstato es elástica, se puede menospreciar la diferencia de presiones dentro y fuera del aeróstato y considerar que la presión en el interior del aeróstato es igual a la presión exterior. Por ello

$$\frac{\rho_1}{M_1} RT = \frac{\rho_2}{M_2} RT,$$

ó

$$\frac{\rho_1}{M_1} = \frac{\rho_2}{M_2}. \tag{2}$$

Pero

$$\rho_2 = \frac{m_2}{V},$$

en donde m_2 es la masa del gas que llena el aeróstato. Por ello, la relación (2) puede ser anotada así:

$$\rho_1 V = \frac{M_1}{M_2} m_2. \qquad (3)$$

Al sustituir la expresión (3) en la fórmula (1) obtenemos:

$$F = m_2 g \left(\frac{M_1}{M_2} - 1\right).$$

De aquí se deduce que la fuerza sustentadora del aeróstato no depende de la altura.

63. La ley de conservación del impulso es justa sólo para un sistema aislado. En cuanto al problema dado el sistema "cinta - hombre" no puede considerarse aislado ya que los rodillos se hallan fijados y, cuando el hombre aumenta o disminuye su velocidad respecto a la cinta, el impulso se transmite no sólo a la cinta, sino asimismo a la Tierra. Por eso el hombre puede abandonar la cinta corriendo si lo haga de manera irregular.

64. Analicemos el caso, cuando el hombre arrastra la caja. Para desplazar la caja sin resbalar por el piso el hombre debe aplicar a la caja la fuerza F, cuya proyección horizontal en su valor absoluto es mayor o igual a la fuerza de rozamiento de reposo de la caja contra el piso y menor que la fuerza de rozamiento de reposo del hombre contra el piso:

$$F \cos \alpha \geqslant \mu (Mg - F \operatorname{sen} \alpha),$$

$$F \cos \alpha \leqslant \mu (mg + F \operatorname{sen} \alpha),$$

en donde α es el ángulo entre la fuerza aplicada a la caja y el horizonte (fig. 151). De aquí

$$\mu F \operatorname{sen} \alpha \geqslant \mu Mg - F \cos \alpha,$$

$$\mu F \operatorname{sen} \alpha \geqslant F \cos \alpha - \mu mg.$$

Al solucionar este sistema de ecuaciones respecto a F sen α y F cos α obtenemos:

$$F \operatorname{sen} \alpha \geqslant \frac{1}{2} (M - m) g,$$

$$F \cos \alpha \geqslant \frac{1}{2} \mu (M + m) g.$$

Consiguientemente,

$$F \geqslant \frac{1}{2}\, g\, \sqrt{(M-m)^2 + \mu^2 (M+m)^2}.$$

65. El alargamiento Δl del muelle puede ser expresado así:

$$\Delta l = n \cdot 2d \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2},$$

en donde n es el número de espiras del muelle y α, el ángulo al que se destorsiona la espira del muelle (fig. 152). Ya que el alargamiento total del muelle es pequeño, este ángulo es pequeño y

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}.$$

Consiguientemente,

$$\Delta l = nd\alpha.$$

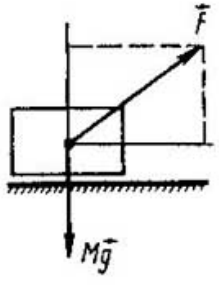


Fig. 151

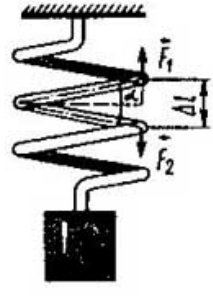


Fig. 152

El ángulo α es proporcional a los momentos de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que extienden la espira:

$$\alpha \sim Fd,$$

en donde $F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$. Ya que las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son iguales en módulo al peso P de la carga suspendido en el muelle, entonces

$$\Delta l \sim nd^2 P.$$

El diámetro de espiras del segundo muelle es dos veces mayor, mientras que el número de espiras del mismo es dos veces menor; consiguientemente, el alargamiento absoluto del segundo muelle es dos veces mayor que el del primero. De ese modo, el segundo muelle se extiende en $\frac{2}{5}$ de su longitud.

66. Hallándose en equilibrio la burbuja de gas en el líquido, la sobre-

presión dentro del mismo es igual a $\frac{2\sigma}{R}$ (en donde σ es la tensión superficial y R el radio de la burbuja).

El agua se pone a hervir, cuando la sobrepresión del aire y del vapor saturado dentro de las burbujas llega a ser mayor que $\frac{2\sigma}{R}$, ya que sólo en este caso la burbuja comienza a expandirse y emerge.

En el agua hervida se quedan sólo burbujas muy pequeñas, por ello para que ésta se ponga a hervir, la sobrepresión dentro de estas burbujas ha de ser mayor que en caso del agua sin hervir que contiene burbujas grandes. Por consiguiente, la temperatura de ebullición del agua hervida es superior a la temperatura de ebullición del agua sin hervir. Debido a ello el agua que se halla en la cacerola grande comunica al agua en la cazuela pequeña el calor necesario para su ebullición. Justamente esto explica el experimento descrito en el problema.

67. Tal que

$$E = a(1+\cos\Omega t)\cos\omega t = a\cos\omega t + \frac{1}{2}a\cos[(\omega-\Omega)t] + \frac{1}{2}a\cos[(\omega+\Omega)t],$$

la onda modulada en amplitud constituye la suma de tres ondas monocromáticas de frecuencias ω, $\omega_1 = \omega - \Omega$ y $\omega_2 = \omega + \Omega$. Los cuantos de energía correspondientes a estas ondas son iguales a:

$$W = h\omega = 2{,}1 \cdot 10^{-18}\ \text{J},$$

$$W_1 = h\omega_1 = 1{,}89 \cdot 10^{-18}\ \text{J},$$

$$W_2 = h\omega_2 = 2{,}31 \cdot 10^{-18}\ \text{J}.$$

Ya que la energía de ionización del átomo de hidrógeno es $W_i = 13{,}5$ eV $= 2{,}16 \cdot 10^{-18}$ J, entonces $W_i > W_1$ y $W_i > W$. Por ello, las oscilaciones de frecuencias ω y ω_1 no pueden ionizar al átomo de hidrógeno. La ionización puede efectuarse sólo por oscilaciones de frecuencia ω_2. La energía W_e de los electrones arrancados por las mismas será igual a la diferencia $W_2 - W_i = 1{,}5 \cdot 10^{-19}$ J.

68. Ya que la tensión del campo en el interior de la bola es igual al cero, el potencial de todos los puntos dentro de la bola es igual y equivale al potencial de los puntos que se hallan en su superficie. Por eso es suficiente determinar el potencial del campo en cualquier punto en el interior de la bola, por ejemplo en su centro. Es igual a

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} + \Sigma\frac{\Delta q_i}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

en donde Δq_i son las cargas inducidas en la superficie de la bola, r, el radio de la misma. Ya que la carga total de la bola

$$Q = \sum_i \Delta q_i$$

es igual al cero, el segundo sumando es igual al cero. De resultas hallamos:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

69. En el sistema inercial de lectura relacionado con las estrellas la velocidad angular del objetivo que parece inmóvil respecto a las mismas es igual a cero. Por ello este objetivo no puede poseer aceleración centrípeta y, por consiguiente, no puede girar en torno a algún punto de espacio, lo mismo que en torno a la Tierra. Consiguientemente, tal cuerpo no puede ser satélite de la Tierra.

70. Para determinar la densidad ρ de la piedra es indispensable conocer su masa m y su volumen V:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Con ayuda del dinamómetro se puede determinar el valor del peso del cuerpo en el aire P_1 y en el agua P_2. La diferencia de estos valores es igual a la fuerza de Arquímedes F_A que actúa sobre la piedra en el agua (la fuerza de Arquímedes que actúa sobre la piedra en el aire puede ser menospreciada). Conociendo la densidad de agua ρ_0, determinamos el volumen de la piedra:

$$V = \frac{F_A}{\rho_0 g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho_0 g},$$

y su densidad

$$\rho = \frac{P_1}{gV} = \frac{P_1}{P_1 - P_2}\rho_0.$$

71. La solución más simple es posible en el caso, cuando el experimentador dispone de un pequeño cuerpo que flota tanto en el agua como en el líquido a investigar. En este caso, de la condición de flotabilidad de este cuerpo en el agua se desprende:

$$mg = \rho_1 V_1 g,$$

ó

$$m = \rho_1 V_1,$$

en donde ρ_1 es la densidad del agua y V_1 el volumen de la parte de cuerpo sumergida en el agua.

De la misma manera, partiendo de la condición de flotación de este cuerpo en el aceite, tenemos:

$$m = \rho_2 V_2,$$

en donde ρ_2 es la densidad de aceite y V_2, el volumen de la parte de cuerpo sumergida en el aceite.

De ahí se desprende que

$$\rho_1 V_1 = \rho_1 V_2,$$

ó

$$\rho_2 = \frac{V_1}{V_2}\rho_1.$$

Si el experimentador no dispone de un cuerpo conveniente, este problema puede ser solucionado de otra manera. En una probeta graduada se echa una vez el agua y otra vez el líquido a investigar y sumergen dicha probeta en el recipiente con agua. En la probeta se echa tanta cantidad del agua y del líquido a investigar que la misma en ambas veces resulte a flote en el recipiente con agua sumergiendo a una misma profundidad. Esto significa que en ambos casos la masa de la probeta graduada con el líquido es igual. Consiguientemente, son iguales las masas tomadas del agua y del líquido a investigar:

$$\rho_1 V_1' = \rho_2 V_2',$$

en donde V_1' y V_2' son los volúmenes del agua y del líquido a investigar en la probeta graduada. De ahí

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1'}{V_2'}$$

72. Con fines de elevar la precisión de las mediciones se puede proceder de la manera siguiente. Primero hay que montar un circuito según el esquema reproducido en la figura 153, a para detemrinar la resistencia del amperímetro r_A:

$$r_A = \frac{U_1}{I_1}.$$

en donde I_1 y U_1 son las indicaciones del amperímetro y del voltímetro. Seguidamente montar un circuito según el esquema reproducido en la figura 153, b y de la ecuación

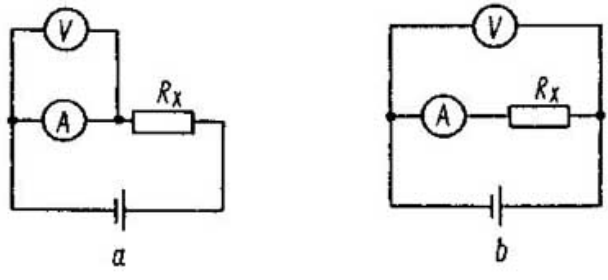


Fig. 153

$$I_2 (R_x + r_A) = U_2$$

(en donde I_2 y U_2 son las indicaciones del amperímetro y del voltímetro) hallar la resistencia R_x del resistor:

$$R_x = \frac{U_2}{I_2} - r_A = \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_1}{I_1}.$$

73. Hay que cubrir los alambres con una capa fina de cera. Con este objetivo es necesario calentarlos y frotarlos contra un pedazo de cera dura. Luego hace falta juntar todos los alambres de un extremo y calentar el lugar de unión. Dentro de unos lapsos iguales de tiempo se debe medir las longitudes de los tramos de alambre en los cuales la cera se ha derretido. La relación de estas longitudes $l_1 : l_2 : l_3$ ... es aproximadamente igual a la relación de los coeficientes de conductibilidad térmica de los alambres. El error del experimento se debe a la diferencia de la pérdida de calor de los alambres de conductibilidad térmica diferente. Cuanto mayor es la conductibilidad térmica del alambre tanto más largo es el tramo de la parte calentada del mismo y, consiguientemente, mayor es la pérdida de calor desde su superficie. Por esta razón es deseable llevar a cabo el experimento bastante rápido. Para obtener el resultado más preciso se puede realizar unos cuantos experimentos independientes.

74. Para que el "globo" tome altura es necesario que la fuerza de Arquímedes F_A, que actúa en el "globo" de parte del aire atmosférico, sea mayor que la fuerza de gravedad, que actúa sobre la envoltura del "globo" y el aire caliente, que se halla dentro del "globo":

$$F_A > mg + V\rho g,$$

ó

$$V\rho_0 g > mg + V\rho g.$$

De aquí

$$m < V(\rho_0 - \rho),$$

en donde m es la masa de la envoltura, V, el volumen del "globo". La masa de la envoltura puede ser hallada de la expresión

$$m = \sigma S,$$

en donde σ es la masa de una unidad de superficie (1 m^2) de una hoja de periódico, S la superficie de la envoltura del "globo".

Si a la envoltura de periódico se le confiere la forma de un cubo con la arista a, entonces se puede anotar:

$$\sigma \cdot 6a^2 < a^3 (\rho_0 - \rho),$$

de ahí

$$a > \frac{6\sigma}{\rho_0 - \rho}.$$

Ya que la masa de una hoja doble estándar de periódico cuyas dimensiones son 0,84·0,59 m^2 (la superficie es $S_0 = 0{,}5\ m^2$) es igual a $m_0 = 20$ g, entonces

$$\sigma = \frac{m_0}{S_0} = 0{,}04\ kg/m^2.$$

Al sustituir los valores de densidades ρ y ρ_0 aducidos en la condición del problema, obtenemos:

$$a > \frac{6 \cdot 0{,}04}{1{,}3 - 1}\ m = 0{,}8\ m.$$

De este modo el cubo de periódico con la arista de más de 0,8 m, lleno de aire caliente, podrá subir a sí mismo.

75. Durante el movimiento del hombre en el bote sobre el último actúan dos fuerzas: la fuerza F con la que el hombre empuja el bote y la fuerza de rozamiento contra el agua

$$\vec{F}_{roz} = -\alpha\vec{v},$$

en donde α es el coeficiente de proporcionalidad y v la velocidad del bote. En poco tiempo Δt la resultante de estas fuerzas variará el impulso del bote en la magnitud

$$\Delta(Mv) = (F - F_{roz})\,\Delta t = F\Delta t - \alpha v\Delta t = F\Delta t - \alpha\Delta l, \qquad (1)$$

en donde M es la masa del bote, v, su velocidad media en el lapso de tiempo Δt y Δl, el camino que recorrerá el bote respecto al agua en el tiempo Δt. En este tiempo el impulso de hombre cambia en

$$\Delta(mu) = -F\Delta t, \qquad (2)$$

en donde m es la masa del hombre y u, velocidad respecto al agua.

Tomando en consideración (2) se puede representar la variación del impulso del bote como sigue:

$$\Delta(Mv) = -\Delta(mu) - \alpha\Delta l.$$

En el curso del movimiento del bote su impulso cambiará en la magnitud igual a

$$\Sigma\Delta(Mv) = -\Sigma\Delta(mu) - \alpha\Sigma\Delta l,$$

ó

$$Mv = -mu - \alpha l,$$

en donde l es el desplazamiento total del bote.

Pero al pasar el hombre a la popa, él va a moverse respecto al agua

con la misma velocidad que el bote. Además, la velocidad final del bote será igual al cero (al fin y al cabo el bote se detiene). Al adoptar $v = u = 0$, obtenemos: $l = 0$. De esta manera, para el momento de detenerse el bote, él regresará al mismo punto en el que se hallaba antes de comenzar a moverse el hombre.

76. Supongamos que en cierto momento el cable no está tenso (por ejemplo, debido a que el remolcador había perdido la velocidad al "situarse sobre la ola"). Entonces la velocidad del bote remolcado disminuye a efecto de la resistencia del agua, mientras que la velocidad del remolcador aumenta merced al trabajo de los remeros o del motor. El cable se pone tenso. El tiempo τ de tensión del cable en el orden de la magnitud se expresa así:

$$\tau = \frac{h^2}{lv},$$

en donde v es la velocidad del remolcador respecto al bote, l la longitud del cable de remolque y h, la altura a la que se pandea el cable de remolque en el momento cuando comienza a ponerse tenso. Ya que este tiempo comúnmente es corto (el cable se pone tenso "a tirón"), entonces, como en el caso de una colisión elástica de dos cuerpos iguales, el remolcador y el bote intercambian de impulsos y la velocidad del remolcador llega a ser menor que la velocidad del bote. El cable se pandea (fig. 154). A continuación el proceso descrito se repite.

77. Analicemos el caso, cuando durante el movimiento del émbolo el volumen del gas aumenta. Expandiéndose el gas realiza el trabajo a costa de su energía interna y con ello se enfría ya que el intercambio de calor con el medio ambiente no existe.

En el émbolo dan sólo aquellas moléculas de gas cuya velocidad de movimiento térmico es superior a la velocidad del émbolo. Por ello, con la velocidad grande del émbolo la presión de gas sobre él y, por consiguiente, el trabajo realizado por el gas es menor que con la velocidad pequeña. Es menor también el descenso de la temperatura del gas.

Ya que en el gas siempre hay moléculas con velocidades muy grandes, la presión de gas sobre el émbolo y, por consiguiente, el trabajo realizado por el gas nunca son iguales al cero, pero pueden ser muy pequeños, si la velocidad del émbolo es suficientemente grande.

Si durante el movimiento del émbolo el volumen de gas disminuye, el trabajo se realiza encima del gas y su energía interna y la temperatura aumentan.

78. Sea que en el momento inicial de tiempo ($t = 0$) los delfines se encuentran a la distancia l y el primer delfín emite un impulso. El segundo delfín recibirá este impulso al cabo del lapso de tiempo t_1. En ese tiempo el sonido recorrerá el camino $l - vt_1$. Consiguientemente,

$$t_1 = \frac{l - vt_1}{c}. \qquad (1)$$

El siguiente impulso es emitido por el primer delfín dentro del lapso de tiempo $T = \frac{1}{\nu}$. Este impulso llegará hasta el segundo delfín en el momento de tiempo

$$t_2 = T + \frac{(l - vt_1) - vT - v(t_2 - t_1)}{c}. \qquad (2)$$

Al restar de la expresión (2) la expresión (1) e introducir la designación $t_2 - t_1 = T_1'$, obtenemos:

$$T' = T - \frac{v}{c}(T + T').$$

De aquí hallamos:

$$T' = T\frac{c - v}{c + v}.$$

Por consiguiente, la frecuencia de repetición de los impulsos que percibe el segundo delfín es igual a

$$\nu' = \nu\frac{c + v}{c - v}.$$

Esta variación de la frecuencia ha recibido el nombre del efecto Doppler.

79. El diámetro interior visible del capilar se determina por los rayos los cuales saliendo del tubo, siendo paralelos, parten de los puntos en la superficie interior del tubo por la tangente a esta superficie (fig. 155). En este caso se hallan separados al máximo uno de otro. Tal que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{1}{n} \text{ y } \operatorname{sen}\beta = \cos\gamma = \frac{r}{R},$$

entonces

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{r}{R}\frac{1}{n}.$$

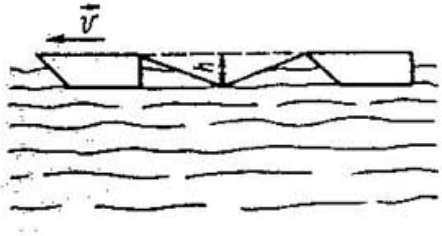


Fig. 154

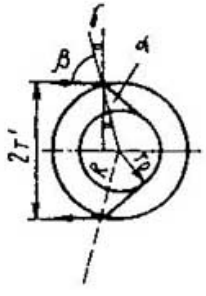


Fig. 155

Como se deduce de la figura,

$$r_0 = R \operatorname{sen} \alpha = r \frac{1}{n}.$$

Esto es justo si $R > r_0 n$. Pero si $R \leq r_0 n$, el radio interior visible del tubo va a coincidir con su radio exterior y por eso la superficie interior del tubo no será visible: el tubo parecerá macizo.

80. El gráfico aproximado de dependencia de h (t) se reproduce en la figura 156. El primer tramo corresponde a la dilatación térmica del líquido, el segundo, a la evaporación del líquido a la temperatura constante y el tercero, a la expansión térmica de vapor.

81. Independientemente del signo la partícula se desviará del dipolo.

Analicemos detalladamente el caso, cuando la partícula se acerca al dipolo del lado de la carga que tiene el mismo signo con la de la partícula.

Por ahora la partícula se halla a la izquierda (fig. 157) del plano OO' que pasa por el centro del dipolo perpendicularmente a su eje; la distancia entre la partícula y el dipolo es menor que cuando la partícula se halla a la derecha del plano OO' a una misma distancia de este plano. Por eso la fuerza, que actúa sobre la partícula y hace que la misma se desvíe del eje de dipolo, en el primer caso es mayor que en el segundo.

Para comparar las variaciones del impulso de la partícula que tienen lugar antes del plano OO' y después del mismo determinemos el tiempo en el que la partícula recorre los trayectos respectivos del camino. Para ello analicemos cómo varía la energía cinética de la partícula durante su movimiento. En la figura 158 se muestra el gráfico de dependencia entre el potencial del campo que crea el dipolo y la distancia hasta el plano OO'. La dependencia del potencial del campo de dipolo a lo largo de la trayectoria de la partícula se describe por la fórmula

$$\varphi \approx \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2},$$

en donde q es el módulo de la carga de las partículas del dipolo, r_1 y r_2, la distancia entre la partícula y las cargas del dipolo.

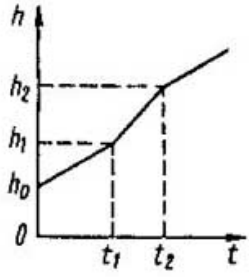


Fig 156

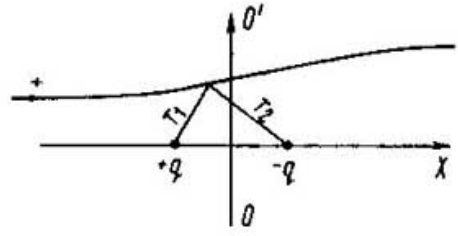


Fig. 157

Valiéndose del gráfico mencionado y de la ley de conservación de la energía

$$W_{tot} = W_c + \varphi q_1$$

(en donde W_{tot} y W_c son respectivamente las energías total y cinética de la partícula y q_1, su carga) es fácil construir el gráfico de dependencia entre la energía cinética de la partícula y su distancia hasta el plano OO' (fig. 159). En este gráfico se ve que, cuando la partícula se halla a la izquierda del plano OO', su energía cinética y, consiguientemente, la velocidad son menores que la energía cinética y la velocidad en el tramo respectivo a la derecha del OO'. Esto significa que el tiempo en el curso del cual la partícula recorre un trayecto determinado del camino en el primer caso (a la izquierda) es mayor que en el segundo (a la derecha).

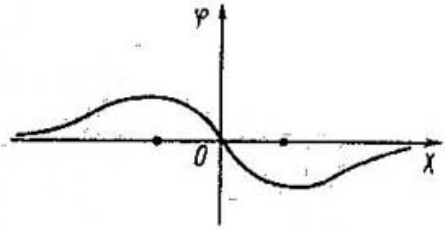


Fig. 158

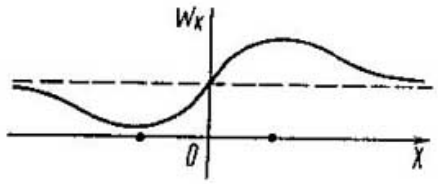


Fig. 159

De este modo, cuando la partícula se halla a la izquierda del OO', en la misma actúa una fuerza mayor que en el caso de hallarse ésta a la derecha. En el primer caso mayor es también el tiempo de interacción. Por ello la variación del impulso de la partícula en el primer tramo del camino (a la izquierda del OO') es mayor que la variación del impulso de la partícula en el segundo tramo (a la derecha del OO'). Por consiguiente, en resumen tiene lugar la desviación de la partícula fuera del dipolo.

De manera análoga se analiza el caso, cuando la partícula se aproxima al dipolo del lado de la carga cuyo signo es contrario al de la carga de la partícula.

82. No es sólo cuestión de la tensión, sino de la potencia para la que está calculada la bombilla. Si la potencia de la bombilla conectada de 12 voltios es menor que la de otras bombillas, la intensidad de la corriente que fluye por esta bombilla es notablemente mayor que la intensidad de la corriente para la cual está calculada y ella se quema.

Pero la bombilla de 6,3 V no se quema, si está calculada para la potencia que es igual o mayor que la mitad de la potencia de las bombillas de 12 voltios conectadas en el circuito.

83. Tanto las fuerzas de gravedad como las fuerzas de presión del agua que actúan sobre los émbolos son proporcionales a las superficies

de los émbolos, o sea a los cuadrados de sus diámetros. Consiguientemente, son proporcionales a los cuadrados de los diámetros asimismo los módulos de las resultantes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ de las fuerzas de gravedad y de las fuerzas de presión que actúan sobre los émbolos:

$$F_1 = \alpha d_1^2,\ F_2 = \alpha d_2^2,\ F_3 = \alpha d_3^2,$$

en donde α es el coeficiente de proporcionalidad.

Designando con x la distancia entre el centro de la varilla y el punto al cual hay que fijar la carga (fig. 160), se puede anotar las condiciones de equilibrio de la varilla de la manera siguiente:

$$\Sigma F = 0,\ \text{o}\ \alpha d_1^2 + \alpha d_2^2 + \alpha d_3^2 - Mg = 0,$$

$$\Sigma M_0 = 0,\ \text{o}\ \alpha d_1^2 \cdot a - Mgx - \alpha d_3^2 a = 0.$$

De aquí

$$x = a\,\frac{d_1^2 - d_3^2}{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}.$$

84. El trabajo A es igual a la variación de la energía potencial del sistema "tierra - cuerpo - agua". Ya que al subir el cuerpo el volumen de agua V se desplaza de la superficie a la profundidad h_0, entonces

$$A = mg\,(h + h_0) - \rho V g h_0 \approx 150\ \text{J},$$

en donde $\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$ es la densidad del agua. El trabajo A es menor que la variación de la energía potencial del cuerpo.

85. El curso de los rayos en ambos casos se muestra en la figura 161. La imagen AB del objeto es proporcionada por el sistema en ausencia de la lente divergente adicional. Al punto B llega el haz convergente de los rayos.

La distancia focal de la lente divergente debe ser tal que la distancia OA sea tres veces menor que OA'. Entonces al punto B' llegará también el haz convergente de los rayos y $\frac{A'B'}{AB} = 3$. Esta distancia focal

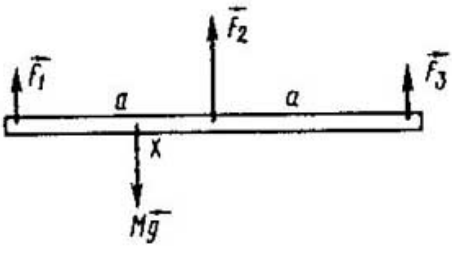


Fig. 160

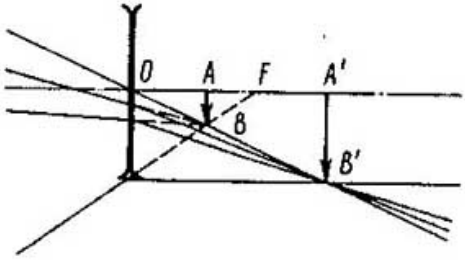


Fig. 161

puede ser hallada representando el curso del rayo el cual después de la lente divergente se propaga paralelamente al eje óptico principal.

86. El módulo de la resultante $\vec{F}$ de la fuerza expulsora de Arquímedes y la fuerza de gravedad es igual a $(\rho - \rho_2)\, Vg$ (en donde ρ es la densidad del agua, ρ_2, la densidad de gas en la burbuja y V, el volumen de la burbuja). La densidad de gas en la burbuja es proporcional a la presión p de gas, la que es igual a $p_0 + \frac{2\sigma}{R}$ (en donde R es el radio de la burbuja, σ, la tensión superficial del agua y p_0, la presión de gas encima de la superficie de la limonada). Tal que

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

entonces

$$F \sim [\rho - \alpha\,(p_0 - \frac{2\sigma}{R})]\, R^3.$$

La fuerza de resistencia F_r durante la subida de la burbuja a la superficie es directamente proporcional a la superficie de la sección frontal, o sea al cuadrado del radio de la burbuja:

$$F_r \sim R^2.$$

Consiguientemente,

$$\frac{F}{F_r} \sim (\rho - \alpha p_0)\, R + 2\sigma.$$

Esta relación crece según la ley lineal con el aumento del radio de las burbujas. Por ello las burbujas grandes emergen con una aceleración mayor y se sitúan por encima de las pequeñas.

87. Repartamos el volumen del planeta en capas esféricas finas de espesor Δr. Es fácil demostrar que la resultante de las fuerzas gravitacionales que actúan del lado de la capa en la partícula dentro de esta capa es igual al cero. En efecto, examinemos para ello un cono de pequeño ángulo en la cúspide, en la que se halla alojada una partícula de masa m. El cono corta de la capa sectores de superficies S_1 y S_2 (fig. 162). Si la masa de la sustancia que cae por una unidad de superficie de la capa es igual a μ, las fuerzas gravitacionales que actúan sobre la masa m del lado de los sectores S_1 y S_2 son iguales a:

$$F_1 = \frac{m\mu S_1}{r_1^2}, \quad F_2 = G\frac{m\mu S_2}{r_2^2};$$

pero

$$\frac{S_1}{r_1^2}\cos\alpha_1 = \frac{S_2}{r_2^2}\cos\alpha_2 = \Omega,$$

en donde Ω es el ángulo sólido en la cúspide O del cono. Según la construcción $OM_1 = OA_1$ y $OM_2 = OA_2$. Por ello

$$\overset{\frown}{OA_1M_1} = \overset{\frown}{OA_2M_2}.$$

Además,

$$\overset{\frown}{OA_1B_1} = \overset{\frown}{OA_2B_2}$$

como ángulos que se apoyan en un mismo arco. Tal que

$$\alpha_1 = \overset{\frown}{OA_1B_1} - \overset{\frown}{OA_1M_1}$$

y

$$\alpha_2 = \overset{\frown}{OA_2B_2} - \overset{\frown}{OA_2M_2},$$

entonces $\alpha_1 = \alpha_2$ y, consiguientemente,

$$\frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2}.$$

Merced a ello $F_1 = F_2$ y estas fuerzas equilibran recíprocamente una a otra. Al realizar el examen análogo para otros sectores de la capa, demostraremos la afirmación hecha.

La fuerza con la que se atrae un elemento de la capa del volumen $\Delta S \cdot \Delta r$ al centro del planeta es igual a

$$F = G\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \pi \Delta S \Delta r \rho}{r^2},$$

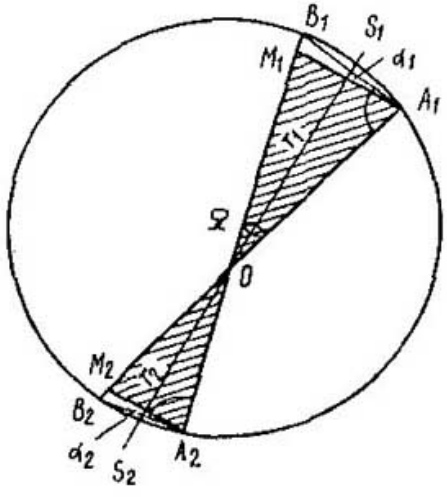


Fig. 162

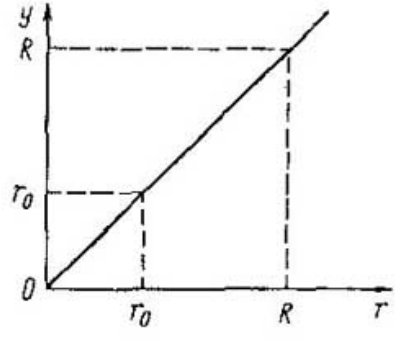


Fig. 163

en donde r es la distancia entre este elemento y el centro del planeta. De aquí hallamos que el aumento de la presión en el sector de espesor Δr es igual a

$$\Delta p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{4}{3}\pi G\rho^2 r \Delta r.$$

Por ello la presión a la distancia r_0 del centro del planeta será igual a

$$p = p_0 + \frac{4}{3}\pi G\rho^2 \Sigma r \Delta r.$$

Ya que la suma $\Sigma r \cdot \Delta r$ es igual a la superficie de la figura limitada por el gráfico $y = r$ y el eje r (fig. 163), entonces

$$\Sigma r \Delta r = \frac{(R + r_0)(R - r_0)}{2} = \frac{R^2 - r_0^2}{2}.$$

Por ello

$$p = p_0 + \frac{2}{3}\pi G\rho^2 (R^2 - r_0^2).$$

Adoptando la presión p_0 sobre la superficie del planeta igual al cero, obtenemos:

$$p = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 (R^2 - r_0^2).$$

En el centro del planeta ($r_0 = 0$) la presión es igual a

$$p = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2$$

Adoptando la densidad media de las rocas terrestres igual a $1{,}7 \times 10^3$ kg/m^3 y el radio de la Tierra $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3$ m obtenemos para la presión en el centro de la Tierra: $p \approx 1{,}6 \cdot 10^9$ N/m^2.

88. La solución del problema se muestra en la figura 164. Ya que la potencia es igual a $\frac{U^2}{R}$ (en donde R es la resistencia de la lámpara), la resistencia R_1 de la lámpara de 75 W de potencia es 5 veces menor que la resistencia R_2 de la lámpara de potencia 15 W. Cuando el interruptor se halla abierto, la tensión en la lámpara de 15 watios es 5 veces mayor que en la de 75 watios y es igual aproximadamente a 184 V. Esta lámpara luce. En la lámpara de 75 watios la tensión es igual a unos 37 V y el filamento de esta lámpara no se encandece.

89. Designemos con l la longitud de cada uno de los hilos, con M la masa de la bola izquierda y con m, la de la derecha. En un momento inicial la bola izquierda se halla a la altura $h = l(1 - \cos\alpha)$ del punto inferior (fig. 165). De la ley de conservación de la energía se desprende

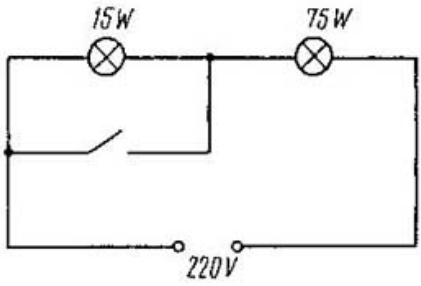


Fig. 164

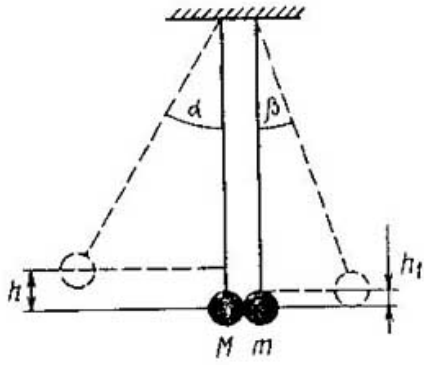


Fig. 165

que la velocidad v de la bola izquierda en el momento de la colisión es tal que

$$\frac{Mv^2}{2} Mgl\,(1 - \cos\alpha),$$

de ahí

$$v = \sqrt{2gl\,(1 - \cos\alpha)}. \tag{1}$$

Ya que la segunda bola después de la colisión ha subido a la altura $h_1 = l\,(1 - \cos\beta)$, esto significa que tenía la velocidad

$$u = \sqrt{2gl\,(1 - \cos\beta)}. \tag{2}$$

Pero al chocar las bolas su impulso sumario se conserva. Por ello

$$M\sqrt{2gl\,(1 - \cos\alpha)} = m\sqrt{2gl\,(1 - \cos\beta)},$$

de ahí

$$\frac{M}{m} = \sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{1 - \cos\alpha}}. \tag{3}$$

Designemos con W la energía mecánica que se pierde en la primera colisión. Entonces

$$Mgl\,(1 - \cos\alpha) = mgl\,(1 - \cos\beta) + W. \tag{4}$$

Sea que la relación de la energía W a la energía potencial máxima W_p de deformación de las bolas igual a k. Ya que en el momento, cuando la deformación de las bolas es máxima, ambas bolas se mueven como cuerpo entero con la velocidad v_0, entonces

$$Mv = (M + m)\,v_0,$$

de ahí

$$v_0 = \frac{M}{M+m} v.$$

De la ley de conservación de la energía se desprende que

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{(M+m)\, v_0^2}{2} + W_p,$$

de ahí

$$W_p = \frac{m}{M+m} \frac{Mv^2}{2}.$$

Ya que

$$\frac{Mv^2}{2} = Mgl\,(1 - \cos\alpha),$$

entonces

$$W_p = \frac{Mm}{M+m} gl\,(1 - \cos\alpha),$$

ó

$$W = k \frac{Mm}{M+m} gl\,(1 - \cos\alpha). \qquad (5)$$

Sustituyendo esta expresión en (4) obtenemos:

$$M(1 - \cos\alpha) = m(1 - \cos\beta) + k \frac{Mm}{M+m} (1 - \cos\alpha). \qquad (4')$$

Designemos con γ el ángulo de desviación de la bola izquierda y con δ, el de la derecha después de la segunda colisión. Razonando de la misma manera que al deducir la igualdad (4'), obtenemos:

$$m(1 - \cos\beta) = M(1 - \cos\gamma) + m(1 - \cos\delta) + k \frac{Mm}{M+m} x\,(1 - \cos\alpha). \qquad (6)$$

Por otro lado, de la condición de conservación del impulso en la segunda colisión tenemos:

$$m\sqrt{2gl\,(1 - \cos\beta)} = M\sqrt{2gl\,(1 - \cos\gamma)} + m\sqrt{2gl\,(1 - \cos\delta)}. \qquad (7)$$

De las ecuaciones (3), (4'), (6) y (7) hallamos:

$$\gamma = \beta.$$

90. En el momento, cuando el ladrillo se separa de la pelota, la velocidad del mismo es igual a la velocidad del punto superior de la pelota. Designemos esta velocidad con v. A continuación el ladrillo se mueve con libertad y al aplicar al mismo la ley de conservación de la energía

$$\frac{Mv^2}{2} = Mgh$$

(en donde h es la altura de elevación del ladrillo), hallamos que

$$v = \sqrt{2gh}$$

La velocidad del punto inferior de la pelota en el momento, cuando el ladrillo se separa de la misma, es igual al cero. Por ello,está claro que la velocidad del centro de la pelota es igual a $\frac{v}{2}$. Al anotar para la pelota la ley de conservación de la energía:

$$\frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = mgh_1$$

(en donde h_1 es la altura de elevación de la pelota) hallamos:

$$h_1 = \frac{h}{4} \approx 25 \text{ cm}.$$

91. Cuando el gas se calienta con el volumen constante, la energía gastada se invierte sólo en la variación de la energía interna del gas, y en el caso del calentamiento con la presión constante ésta se invierte también en la realización del trabajo. La ley de conservación de la energía para estos dos casos se anota así:

$$mc_v \cdot \Delta t = \Delta W,$$

$$mc_p \cdot \Delta t = \Delta W + A,$$

en donde c_p es el calor específico del gas con la presión constante, c_v, el calor específico del gas con el volumen constante, Δt, la variación de la temperatura, ΔW la variación de la energía interna del gas, m, la masa del gas y $A = p \cdot \Delta V$ el trabajo realizado al expandirse el gas (ΔV es la variación del volumen y p, la presión).

Ya que en el caso de la variación igual de la temperatura del gas la variación de su energía interna es igual, independientemente de que este calentamiento se efectúa con constante volumen o constante presión, se puede anotar:

$$c_p m \cdot \Delta t = c_v m \cdot \Delta t + p \cdot \Delta V. \qquad (1)$$

Valiéndose de la ecuación del estado gaseoso se puede expresar el trabajo realizado por el gas mediante la masa de gas m y la constante de gas R:

$$A = p \cdot \Delta V = \frac{m}{M} R \cdot \Delta t.$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (1), obtenemos:

$$c_p = c_v + \frac{R}{M},$$

de ahí

$$M = \frac{R}{c_p - c_v} \approx 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}.$$

El gas desconocido es el oxígeno.

92. Cuando el inducido se halla frenado del todo por su devanado fluye la corriente eléctrica

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

De ahí para la resistencia del devanado de inducido obtenemos:

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I_0}.$$

Durante la rotación del inducido del motor eléctrico en su devanado surge la FEM de inducción $\mathcal{E}$ proporcional a la velocidad angular ω de rotación del inducido:

$$\mathcal{E} = k\omega,$$

en donde k es el coeficiente de proporcionalidad.

Con arreglo a la ley de conservación de la energía

$$\mathcal{E}It = I^2Rt + Nt,$$

o, reduciendo en el tiempo t el trabajo del motor, obtenemos:

$$\mathcal{E}I = I^2R + N,$$

en donde $\mathcal{E}I$ es la potencia consumida por el motor eléctrico a partir de la red, I^2R son las pérdidas de calor en el devanado del inducido, N, la potencia entregada a la carga, R, la resistencia del devanado de inducido e I, la intensidad de la corriente eléctrica en el devanado.

De esta ecuación se desprende que en ausencia de la carga (N = 0) la intensidad de la corriente eléctrica en el devanado de inducido es igual al cero. Pero, en conformidad con la ley de Ohm la intensidad de corriente en el devanado debe ser igual a $\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_i}{R}$. Esto significa que de no haber carga la FEM de inducción $\mathcal{E}_i$ que surge en el devanado de inducido es igual a la FEM del manatial $\mathcal{E}$. Una vez conmutado uno de los manantiales en los devanados de inducidos, va a excitarse la FEM:

$$\mathcal{E}_i' = k\omega = \mathcal{E}_i \frac{\omega}{\omega_0} = \mathcal{E} \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Con ello por los devanados fluirán las corrientes eléctricas

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_i'}{R} = I_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i'}{R} = I_0 \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

A costa del trabajo de los manantiales y de la fuerza externa se produce el calentamiento de los devanados:

$$\mathcal{E}I_1 + \mathcal{E}I_2 + N' = I_1^2 R + I_2^2 R.$$

Aquí

$$N' = Fv = Fr\omega = M\omega,$$

en donde F la fuerza externa aplicada al inducido, M, el momento de esta fuerza respecto al eje y ω, la velocidad angular de los puntos en la superficie del eje de los inducidos. Al sistituir a N', I_1, I_2 y R por sus expresiones con ayuda de M, ω, I_0 y $\mathcal{E}$, obtenemos:

$$M\omega + \mathcal{E}I_0\left[\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right] = I_0^2 \frac{\mathcal{E}}{I_0}\left[\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right],$$

de ahí

$$M\omega + 2\mathcal{E}I_0 = \mathcal{E}I_0\left[2 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right],$$

ó

$$M = \frac{2\mathcal{E}I_0\omega}{\omega_0^2}.$$

93. El flujo luminoso que va en el ángulo sólido unitario es el mismo en todas las direcciones. Designemos con σ el flujo luminoso que va en el ángulo sólido unitario y da en el área unitaria de la lente o el fondo debajo del orificio. En ausencia de la lente en el fondo dan los rayos que van en el ángulo sólido unitario $\Omega = S_{or}/h^2$ (fig. 166, a). Consiguientemente, el flujo luminoso en este caso es igual a $Fl_1 = \sigma\Omega S_{or}$, mientras que la iluminación del fondo debajo del orificio es igual a

$$E_1 = \frac{Fl_1}{S_{or}} = \sigma\Omega = \frac{\sigma S_{or}}{h^2}.$$

La lente junta en su plano focal sobre el fondo de la caja en el área de superficie S a todos los rayos que van en el ángulo sólido $\omega = S/h^2$

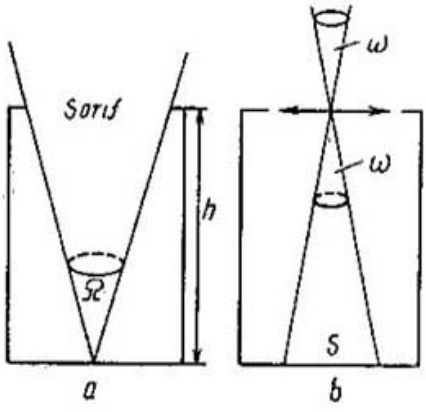


Fig. 166

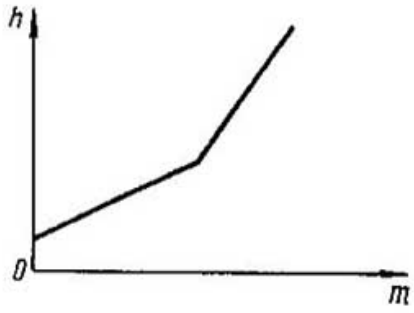


Fig. 167

(fig. 166, b). Tales rayos "portan" el flujo luminoso $Fl_2 = \sigma S_{or}\omega$, así que la iluminación de la imagen del cielo en este caso es igual a

$$E_2 = Fl_2/S = \frac{\sigma S_{or}}{h^2}.$$

Vemos que $E_1 = E_2$, o sea la iluminación del fondo de la caja debajo del orificio no cambia.

94. Véase el problema 88.

95. El rozamiento seco entre las fibras del cordel se troca en el viscoso.

96. Véase el problema 85.

97. Véase la figura 167.

98. El momento de la fuerza $\vec{F}$ aplicada por medio de la cadena (fig. 168) a la rueda trasera de la bicicleta respecto al eje instantáneo 00' de rotación de la rueda está dirigido en el sentido contrario de las agujas de reloj. Por ello la rueda y junto con la misma la bicicleta se desplazará hacia adelante.

99. Ya que la fricción entre los tubos es pequeña, se puede considerar que en el caso de la colisión de los tubos la rotación de uno de ellos no se transmite al otro. Por ello, analizando la colisión se puede no tomar en cuenta la rotación de los mismos.

Anotemos para la colisión de los tubos las leyes de conservación de la energía y del impulso:

$$mv_0 = mv_1 + mv_2, \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2},$$

en donde v_1 y v_2 son las velocidades de movimiento de avance respectivamente del prumero y del segundo tubos después de la colisión. Solucionando estas ecuaciones en conjunto, hallamos: $v_1 = 0$ y $v_2 = v_0$. De

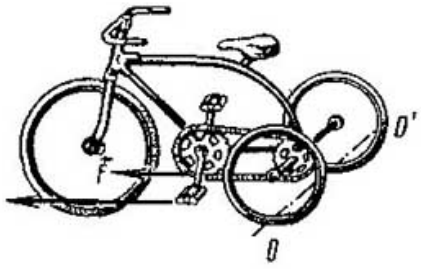


Fig. 168

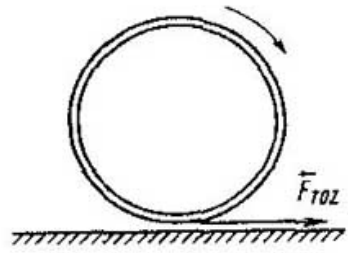


Fig. 169

este modo, en la colisión los tubos se "intercambian" de las velocidades de movimiento de avance.

Examinemos ahora qué va a ocurrir después de la colisión con el tubo que primero se hallaba en movimiento. En el sistema de coordenadas que se mueve con la velocidad v_0, la velocidad del punto de primer tubo que toca el plano es igual a $\vec{v_0}$. Por consiguiente, en este sistema de coordenadas el primer tubo después de la colisión gira sobre su eje con la velocidad angular

$$\omega = \frac{v_0}{R}.$$

La fuerza de rozamiento $F_{roz} = \mu mg$ (fig. 169), que actúa sobre este tubo, aminora su rotación y al mismo tiempo le comunica la aceleración

$$a = \frac{F_{roz}}{m} = \mu g$$

en el sentido del movimiento inicial del tubo. En el momento t este tubo tendrá la velocidad del movimiento de avance

$$v_1' = at = \mu gt$$

y va a girar sobre su eje con la velocidad angular

$$\omega_1 = \frac{v_0 = \mu gt}{R}.$$

La velocidad del movimiento de avance del tubo aumenta proporcionalmente al tiempo, mientras que la velocidad de rotación del tubo disminuye según la ley lineal. En el momento t_0, cuando la velocidad del movimiento de , del eje del tubo llega a ser igual a la velocidad lineal de rotación del tubo alrededor del eje, el resbalamiento del tubo respecto al plano cesa y después de ello ni la velocidad de rotación del tubo ω_1, ni la velocidad del movimiento de avance del eje del tubo u_1' ya no van a variar. Partiendo de la condición

$$\mu g t_0 = v_0 - \mu g t,$$

hallamos t_0:

$$t_0 = \frac{v_0}{2\mu g}.$$

En este momento de tiempo

$$u'_1 = \frac{v_0}{2} = \omega_1 = \frac{v_0}{2R}.$$

Analizando de manera análoga el movimiento del segundo tubo hallamos:

$$u_2 = v_0 - \mu g t \text{ y } \omega_2 = \frac{\mu g t}{R}.$$

La fuerza de rozamiento que actúa sobre el segundo tubo disminuye la velocidad u_2 de su movimiento de avance y aumenta la velocidad angular de rotación ω_2 alrededor del eje. En el momento t_0 el tubo deja de resbalar respecto al plano. A partir de este momento el tubo tendrá la constante velocidad del movimiento de avance

$$u_2 = \frac{v_0}{2}$$

y la constante velocidad angular de rotación alrededor del eje

$$\omega_2 = \frac{v_0}{2R}.$$

Los gráficos de dependencia entre las velocidades de movimiento de avance de los tubos y las velocidades angulares de rotación de los tubos alrededor de sus ejes y el tiempo se ofrecen en la figura 170.

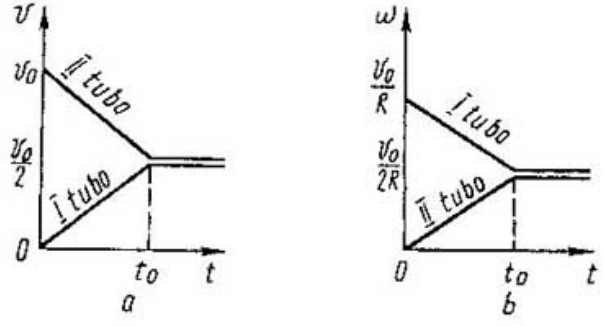


Fig. 170

100. Si la velocidad angular de rotación de la varilla O_1A respecto a la tierra es igual a Ω, en el sistema de coordenadas, que gira junto con la varilla, el punto A es fijo, mientras que la tierra gira alrededor del eje O_1 con la velocidad angular igual en módulo a Ω, en el sentido inverso al sentido de rotación de la varilla respecto a la tierra. La velocidad $\vec{v}$ del punto de tierra, el cual toca la rueda, es igual en módulo a Ωl y está dirigida perpendicularmente a la varilla O_1A (fig. 171). Su proyección sobre el plano de la rueda es igual a $v \cos \alpha$. Ya que la fricción de la rueda contra el suelo es grande, el punto de la rueda con la que la misma toca la tierra se mueve respecto al punto A y, consiguientemente, respecto al eje de la rueda con la velocidad $v_1 = v \cos \alpha$. Esto significa que la rueda gira alrededor de su eje con la velocidad angular

$$\omega = \frac{v_1}{r} = \Omega \frac{l}{r} \cos \alpha.$$

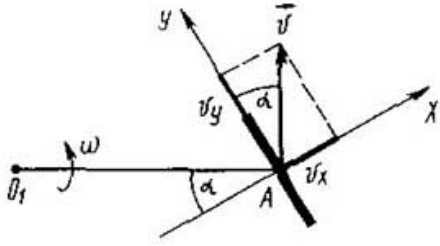


Fig. 171

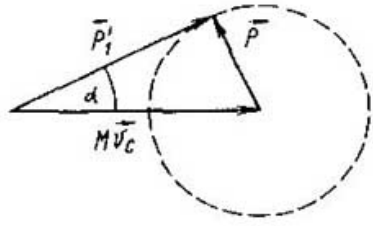


Fig. 172

La relación entre los ángulos de giro de la varilla y de la rueda alrededor de sus ejes es igual a la relación entre las velocidades angulares de rotación de la varilla y de la rueda. Por ello, cuando la varilla O_1A da una vuelta alrededor del eje O_1, la rueda da $\frac{l}{r} \cos \alpha$ de vueltas alrededor de su eje.

101. La velocidad que obtiene el cosmonauta al disparar con la segunda pistola será mayor si él lanza la primera pistola (la masa del cosmonauta disminuye). Por consiguiente, efectuando el tiro consecutivo y arrojando la pistola utilizada el cosmonauta podrá regresar más rápido a la nave.

102. Designemos con $\vec{v}$ la velocidad de la partícula pesada antes del choque. En el sistema de coordenadas que se mueve con la velocidad

$$\vec{v}_c = \frac{M}{M+m} \vec{v}$$

del centro de masas del sistema, ambas partículas tanto antes como después de la colisión poseen impulsos iguales en módulo y opuestos en dirección. Antes de la colisión

$$\vec{p}_1 = M(\vec{v} - \vec{v}_c) = \frac{Mm}{M+m}\vec{v} \text{ y } \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 .$$

Si después de la colisión de las partículas la partícula pesada en el sistema "centro de masas" posee el impulso $\vec{p}$ (mientras que la ligera, el impulso $-\vec{p}$), entonces, valiéndose del enlace

$$W_c = \frac{Mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

y de la ley de conservación de la energía mecánica en el caso del choque absolutamente elástico se puede anotar:

$$\frac{p_1^2}{2M} + \frac{p_1^2}{2m} = \frac{p^2}{2M} + \frac{p^2}{2m}.$$

De aquí se desprende que $p = p_1$, o sea después de la colisión las partículas en el sistema de lectura "centro de masas" van a poseer impulsos iguales en módulo a los de antes de la colisión. La dirección del vector $\vec{p}$ depende de las condiciones de la colisión y puede ser eventual.

La velocidad de la partícula pesada en el sistema "de laboratorio" de lectura después de la colisión será igual a

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_c + \frac{\vec{p}}{M},$$

mientras que su impulso

$$\vec{p}_1' = M\vec{v}_1 = M\vec{v}_c + \vec{p}.$$

La interpretación geométrica de este resultado se ofrece en la figura 172. Ya que el impulso $\vec{p}$ puede tener cualquier dirección, pero su módulo está dado y es igual a $\frac{Mm}{M+m} \cdot v$, entonces el extremo del vector $\vec{p}$ ha de hallarse en la circunferencia de radio $\frac{Mm}{M+m} \cdot \vec{v}$, cuyo centro coincide con el extremo del vector $M\vec{v}_c$. En la figura se ve que el ángulo entre el vector $\vec{p}$ y el vector $M\vec{v}_c$, o sea el ángulo entre las direcciones de vuelo de la partícula pesada después de la colisión y antes de ésta es el máximo, cuando el vector $\vec{p}_1'$ toca la circunferencia mencionada. Por ello

$$\operatorname{sen} \alpha_{máx} = \frac{p}{Mv_c} = \frac{m}{M} .$$

103. El refrigerador es una máquina térmica que funciona por el ciclo reversible. Si el cuerpo de trabajo de la máquina térmica directa recibe una cantidad de calor Q_2 del cuerpo, que posee una temperatura

elevada T_2, y entrega menor cantidad de calor Q_1 al cuerpo, que se halla a una temperatura baja T_1, realizando con ello el trabajo

$$A = Q_2 - Q_1,$$

la máquina refrigeradora roba la cantidad Q_1' de calor del cuerpo, que se encuentra a la temperatura T_1, y entrega la cantidad de calor Q_2' al cuerpo más calentado con la temperatura T_2. Con ello, sobre el cuerpo de trabajo del refrigerador desde afuera se realiza el trabajo

$$A' = Q_2' - Q_1'.$$

El rendimiento de la máquina térmica directa

$$\eta = \frac{A}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$$

no puede ser superior al valor $\frac{T_2 - T_1}{T_2}$. Si el refrigerador funcionase por el mismo ciclo que la máquina directa y a las mismas temperaturas T_1 y T_2, tendrían lugar las siguientes ecuaciones:

$$Q_1' = Q_1,\ Q_2' = Q_2 \text{ y } A' = A.$$

El rendimiento de la máquina refrigeradora en este caso sería igual a

$$\eta' = \frac{Q_1}{A} = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1}.$$

Tal que para una máquina directa ideal

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

ó

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2},$$

para el rendimiento de la máquina refrigeradora ideal obtenemos:

$$\eta' = \frac{Q_1/Q_2}{1 - Q_1/Q_2} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

El valor mínimo de trabajo que debe ser efectuado sobre el cuerpo de trabajo de la máquina refrigeradora ideal se determina así:

$$A = \eta' Q_1 = Q_1 \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

Por ello la potencia consumida por la máquina refrigeradora se calcula por la fórmula

$$P = \frac{Q_1}{t} \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

Sustituyendo aquí los valores de $Q_1 \approx 7{,}9 \cdot 10^5$ J, $T_1 = 278$K y $T_2 = 293$K hallaremos para la potencia consumida por el refrigerador a partir de la red el valor P = 12 W.

Naturalmente, el rendimiento de las máquinas refrigeradoras corrientes (no ideales) es notablemente inferior y, por consiguiente, los refrigeradores reales consumen a partir de la red una potencia notablemente mayor. Ello está relacionado con el hecho de que los procesos en las máquinas refrigeradoras reales son irreversibles.

104. La potencia P del calentador de resistencia R se determina por la fórmula

$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)^2} R,$$

en donde $\mathcal{E}$ es la FEM del manantial y r, su resistencia interna. Esta potencia es máxima con R = r. En efecto, P es máxima, cuando la expresión

$$\frac{(R + r)^2}{R} = R + \frac{r^2}{R} + 2r$$

es mínima. Pero

$$R + \frac{r^2}{R} \geqslant 2\sqrt{R\frac{r^2}{R}} = 2r.$$

Por consiguiente, P es máxima con

$$R + \frac{r^2}{R} = 2r \text{ o sea siendo } R = r.$$

De este modo, el calentador en cuestión va a desarrollar la potencia máxima si su resistencia es próxima o igual a 25 Ohms. Para ello es necesario conectar los espirales como se muestra en la figura 173. No es difícil convencerse de que la potencia de cada espiral en este caso no será superior a 2 W.

105. Véase el problema 85.

106. Véase el problema 98. Si el chico que monta la bicicleta (fig. 174) empuja el pedal inferior hacia adelante con la punta del zapato, entonces en el asiento de la bicicleta el chico va a actuar con la misma fuerza que en el pedal (ya que el chico se halla en equilibrio, las fuerzas horizontales que obran sobre el mismo del lado del pedal y del asiento deben ser iguales). Pero el momento de la fuerza $\vec{F}$ aplicada al asiento

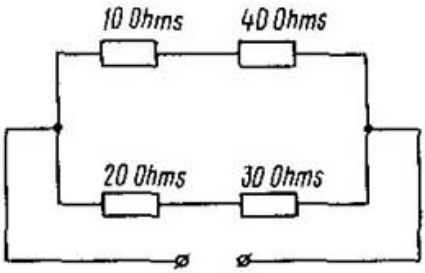


Fig. 173

Fig. 174

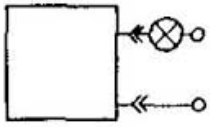


Fig. 175

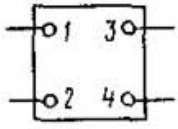


Fig. 176

respecto al eje "0" es mucho mayor que el momento de la fuerza $F_1 = F\frac{r}{r_0}$ – (en donde r es el largo de la palanca del pedal y r_0, el radio de primera rueda dentada) aplicada a la rueda dentada trasera. Por ello, en este caso la bicicleta se desplazará hacia atrás.

107. Si con independencia de la polaridad de acoplamiento del manantial de tensión continua la bombilla no luce (fig. 175), esto significa que en la caja se encuentra un elemento de circuito eléctrico que opone una resistencia grande a la corriente continua. El segundo ensayo consiste en acoplar el manantial de tensión alterna: la incandescencia de la bombilla permite llegar a la conclusión de que en la caja se encuentra un condensador.

108. Acoplemos la pila a los bornes 1–2 (fig. 176). Las indicaciones del voltímetro entre todos los terminales de la caja se ofrecen en la Tabla 1. Acoplemos la pila a los terminales 3–4. Las indicaciones del voltímetro entre todos los terminales de la caja se ofrecen en la Tabla 2.

Tabla 1

Número del contacto	1	2	3	4
1		U_0	0	U_0
2	U_0		U_0	0
3	0	U_0		$U_0/2$
4	U_0	0	$U_0/2$	

Tabla 2

Número del contacto	1	2	3	4
1		U_0	0	U_0
2	U_0		U_0	0
3	0	U_0		U_0
4	U_0	0	U_0	

En otras variantes de acoplamiento del manantial el voltímetro siempre acusa cero.

Los ensayos aducidos permiten llegar a la conclusión de que en la caja se halla montado el circuito mostrado en la figura 25.

N o t a. El voltímetro ha de poseer la resistencia mucho mayor que la resistencia de los resistores que se encuentran en la "caja negra".

109. Hay que enrollar un trozo de alambre en uno de los arrollamientos del transformador y contar el número de espiras n_0. Seguidamente aplicar la tensión a uno de los arrollamientos y medir las tensiones en todos los arrollamientos. En el caso del transformador no cargado las relaciones de estas tensiones son iguales a las de los números de espiras.

110. Sobre uno de los platillos de la balanza colocar una pesa cuya masa es notoriamente mayor que la masa de la carga. En el otro platillo de la balanza se colocan pesas hasta equilibrarse la misma. Luego en el mismo platillo se coloca una carga de masa desconocida, mientras que las pesas se quitan hasta que se restablezca el equilibrio. La masa de las pesas quitadas es igual a la masa de la carga. Aplicando este método de solución no es preciso conocer la masa de los platillos de la balanza. El primero en proponer tal método de medición de la masa de cuerpos fue D.I. Mendeléyev.

111. Al calentar la masa determinada de agua m_1 hasta la temperatura t_1, la transvasan al calorímetro de masa m_2 con la temperatura inicial t_2. Midiendo la temperatura de agua Θ después del transvase, se puede determinar el calor específico c_2 del material del calorímetro

$$c_1 m_1 (t_1 - \Theta) = c_2 m_2 (\Theta - t_2), \; c_2 = \frac{c_1 m_1 (t_1 - \Theta)}{m_2 (\Theta - t_2)},$$

en donde c_1 es el calor específico del agua (se considera conocido).

Las masas m_1 y m_2 del agua y del calorímetro se determinan por pesada.

112. La barra se coloca sobre la tabla la que se inclina hasta tal ángulo α con el cual la barra comienza a resbalar uniformemente hacia abajo, cuando se golpea ligeramente por la tabla. De la ecuación de movimiento

$$F_{roz} - mg \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

ó

$$\mu mg \cos \alpha - mg \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

hallamos:

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha.$$

Midiendo el ángulo α hallamos el valor de μ.

113. La velocidad v_0 de salida del proyectil de la pistola de resorte puede ser determinada por la distancia de su vuelo l en dirección horizontal desde la altura h:

$$v_0 = \frac{l}{t},$$

en donde t es el tiempo de caída del proyectil que se determina por la fórmula

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Consiguientemente,

$$v_0 = l \sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

Para elevar la precisión de mediciones hay que efectuar una serie de disparos registrando el lugar de impacto de la bola con ayuda de hojas de papel blanco y de papel carbón, promediar el valor de la distancia de vuelo l y calcular el valor correspondiente de la velocidad media de salida del proyectil.

114. La tensión superficial σ puede ser determinada como relación entre la fuerza de tensión superficial F y el largo l del margen de la superficie:

$$\sigma = \frac{F}{l}$$

La fuerza de tensión superficial puede ser determinada midiendo con un muelle sensible la fuerza que hay que aplicar para romper la película del líquido cuya longitud del margen es conocida. Por ejemplo, al extraer desde el líquido el anillo con los diámetros exterior e interior d_1 y d_2, la película del líquido se rompe en el largo $\pi(d_1 + d_2)$. Por ello, para la tensión superficial obtenemos:

$$\sigma = \frac{F_{elas}}{\pi (d_1 + d_2)}.$$

En esta fórmula la fuerza de elasticidad del muelle se determina por la ley de Hook:

$$F_{elas} = kx,$$

en donde k es la rigidez del muelle, x, el alargamiento del mismo al extraer el anillo desde el líquido a investigar.

La rigidez del muelle k puede ser determinada en un ensayo independiente haciendo uso de un juego de pesas y de una regla.

De manera más precisa se puede determinar la fuerza de elasticidad sin variar la rigidez del muelle. Registrando el alargamiento del mismo al extraer el anillo, seguidamente lo cargan con pesas hasta obtener el alargamiento igual. En este caso la fuerza de elasticidad es igual al peso del juego de pesas:

$$F_{elas} = mg.$$

Realizando el trabajo es necesario lograr que sea limpia la superficie del anillo ya que el coeficiente de tensión superficial del líquido depende mucho de las mezclas.

115. Realizando el trabajo se debe aumentar la intensidad de corriente progresivamente de modo que el proceso sea equilibrado y en cualquier momento se cumpla la ecuación

$$P_1 = P_2,$$

en donde P_1 es la potencia de corriente eléctrica que fluye por el alambre, P_2, la potencia de termotransferencia al medio ambiente.

La potencia P_2 es proporcional a la superficie de costado del alambre $S = \pi dl$ (en donde d es el diámetro y l, la longitud del alambre) y constituye la suma de la potencia de irradiación $S\sigma T^4$ con la potencia que caracteriza el proceso de conductibilidad del calor,

$$Sk\,(T - T_0):$$

en donde σ y k son constantes.

La potencia de corriente eléctrica es igual a $P_1 = I^2R$. Pero

$$R = R_0\alpha T = \rho \frac{l}{\pi\,(d/2)^2}\,\alpha T.$$

Por ello

$$P_1 = \frac{4\rho l I^2 \alpha T}{\pi d^2},$$

en donde α es el coeficiente de resistencia térmica y ρ, la resistencia específica del material a partir del cual está hecho el alambre.

Tal que $P_1 = P_2$, entonces

$$\frac{4\rho l I^2 \alpha T}{\pi d^2} = \pi d l\,(\sigma T^4 + k \cdot \Delta T),$$

de donde

$$I \sim d^{3/2}.$$

Realizando el trabajo es útil construir el gráfico de dependencia: $I^2 \sim d^3$.

116. Con ayuda del manómetro (fig. 177) hay que medir la presión p en la botella, cuando ésta se halla a la intemperie, a la temperatura t y la presión p_1, cuando la misma se halla en un baño de María a la temperatura t_1. Las temperaturas se miden con el termómetro. Ya que para el volumen constante

$$\frac{p_1}{1 + \alpha t_1} = \frac{p}{1 + \alpha t},$$

entonces

$$\alpha = \frac{p_1 - p}{pt_1 - p_1 t}.$$

Las presiones p y p_1 son iguales respectivamente a:

$$p = p_a + \rho g h, \quad p_1 = p_a + \rho g h_1,$$

en donde ρ es la densidad del mercurio y p_a la presión atmosférica.

Con el objetivo de que en ambas mediciones el volumen del aire sea uno mismo, el nivel del agua en el codo izquierdo del manómetro ha de ser igual en ambos casos.

La presión atmosférica p_a se mide con ayuda del barómetro.

117. Al hacer pasar por la solución de sulfato cúprico ($CuSO_4$) una corriente eléctrica en el cátodo se desprende el cobre. La masa del cobre desprendido se determina por la fórmula

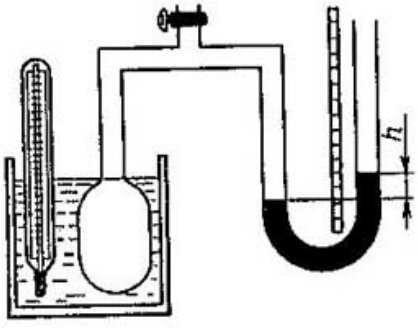


Fig 177

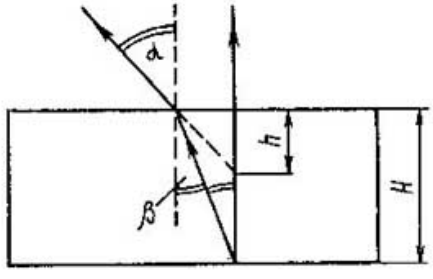


Fig. 178

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{n} It,$$

en donde M = 0,064 kg/mol es la masa molar del cobre, n = 2, la valencia del cobre en este compuesto, F, el número de Faraday, I, la intensidad de corriente y t, el tiempo de pasada de la corriente. De aquí

$$F = \frac{MIt}{mn}.$$

La intensidad de corriente se registra por el amperímetro, el tiempo de pasada de la corriente, con ayuda del reloj y la masa del cobre desprendido se determina según la diferencia de masas del cátodo antes y después del ensayo. Antes de pesar el cátodo por segunda vez es preciso secarlo con escrúpulo.

118. El fundamento del método que se emplea en este trabajo es el fenómeno de disminución aparente del espesor de la placa, cuando a través de la misma se examina la marca en la superficie inferior de la placa con los ángulos de incidencia próximos a cero. En este caso, como se observa en la figura 178, el índice de refracción de cristal se determina así:

$$n = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \approx \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{H}{h},$$

en donde H es el espesor real de la placa y h el espesor aparente de la misma. Trazando marcas en las superficies inferior y superior de la placa, hacer nítida primero la marca inferior, registrar la posición del tubo de microscopio y seguidamente, haciendo subir el tubo, obtener la imagen nítida de la marca superior. La distancia a la que se eleva el tubo es igual al espesor aparente h de la placa. Si el microscopio no está dotado del indicador especial de la altura de elevación del tubo, el desplazamiento del tubo puede determinarse por el número de dientes de la manija de cremallera del microscopio. El desplazamiento del tubo, al ser girada la manija en un diente, se halla de antemano determinando la carrera del tubo en una vuelta completa de la manija y dividiéndola en el número total de los dientes de la manija. Con ayuda del microscopio se puede determinar también el espesor real H de la placa.

Para ello primero se hace nítida la imagen de la marca en la mesita del microscopio. Luego sobre la mesita se coloca la placa de vidrio y se obtiene la imagen nítida de la marca en la superficie superior de la misma. El desplazamiento del tubo es igual al espesor real H de la placa.

119. Debido a la resistencia del aire la energía cinética de la pelota durante el descenso es menor que durante la subida. La diferencia entre estos valores de energía es igual al trabajo de las fuerzas de resistencia del aire. A cualquier altura la velocidad de la pelota durante la subida es mayor que durante el descenso. Claro está que la velocidad media de

movimiento de la pelota hacia arriba es mayor que la velocidad media de su movimiento hacia abajo. Por ello el tiempo de subida de la pelota es menor que el tiempo de su caída.

120. La variación de la energía potencial del cuerpo es igual al trabajo de las fuerzas de resistencia:

$$-mg(h_1 + h_2) = A_1 + A_2, \qquad (1)$$

en donde A_1 es el trabajo de las fuerzas de resistencia en el líquido superior y A_2 el trabajo de las fuerzas de resistencia durante el movimiento del ruerpo en el líquido inferior. Ya que el cuerpo es aerodinámico, la fuerza principal de resistencia es la fuerza expulsora de Arquímedes:

$$F_1 = \rho_1 Vg \text{ en el líquido superior,}$$

$$F_2 = \rho_2 Vg \text{ en el líquido inferior,}$$

en donde V es el volumen del cuerpo. Por ello

$$A_1 = -\rho_1 Vgh_1.$$

$$A_2 = -\rho_2 Vgh_2.$$

Sustituyendo estas expresiones para A_1 y A_2 en la ecuación (1) y teniendo en cuenta que $m = \rho V$, obtenemos:

$$\rho(h_1 + h_2) = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2,$$

de ahí

$$\rho = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h_1 + h_2}.$$

121. Numeremos todas las aristas del cubo y sus cúspides (fig. 179). Está claro que la corriente que fluye por la arista 1 se divide en la cúspi-

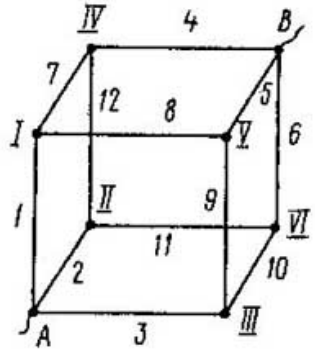


Fig. 179

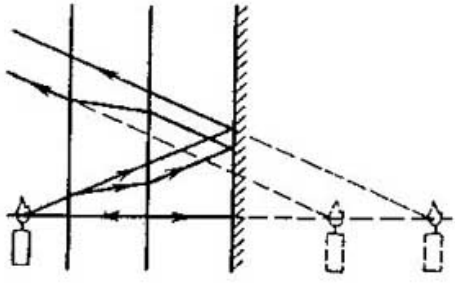


Fig. 180

de I en dos partes que fluyen luego por las aristas 7 y 8. De modo análogo la corriente que fluye por la arista 2 se divide en dos partes iguales en la cúspide II, etc. Por la arista 4 fluye la corriente que iba por las aristas 7 y 12... A la arista 4 equivalen las aristas 5 y 6. Esto significa que por las aristas 1, 2, 3,4, 5 y 6 fluye la corriente dos veces mayor que por las aristas 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Está claro que la resistencia del circuito variará más si del circuito se saca el conductor por el cual fluye la corriente máxima. Del cubo de alambre hay que sacar una de las aristas 1, 2, 3, 4, 5 ó 6.

122. Al trazar el curso de unos cuantos rayos es fácil convencerse de que, después que entre la candela y el espejo es dispuesta la placa planoparalela de vidrio, la imagen de la candela se aproximará al espejo. En la figura 180 se reproduce el curso de los rayos en ausencia y en presencia de la placa.

123. Hallemos primero la intensidad de corriente que fluye por el manantial. Para ello tenemos que determinar la resistencia de todo el circuito. La resistencia del amperímetro es pequeña en comparación con la resistencia de todo el circuito. Adoptemos que sea igual al cero. Esto permite dibujar nuestro esquema como se muestra en la figura 181. Después de ello es fácil hallar la resistencia de todo el circuito. Es igual a 7,5 Ohms. Por ello, a través del manantial fluye la corriente $I_0 = \frac{30}{7,5} A = 4A$.

La corriente que fluye por el manantial se suma con la corriente que va por el amperímetro y la corriente I_1 que va por el resistor R_1 (fig. 182). Hallemos la corriente I_1.

En el punto A la corriente I_0 se divide en partes iguales entre los ramales superior e inferior del circuito. Por ello por el resistor R_2 fluye la corriente I_2 igual a 2A. En el punto B esta corriente vuelve a dividirse en partes iguales entre los resistores R_1 y R_3 de resistencias iguales. Por

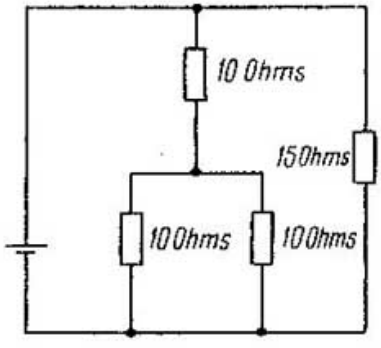


Fig. 181

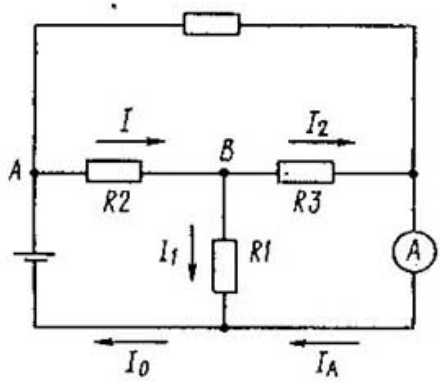


Fig. 182

ello la intensidad de corrienee que va por el resistor R_1 es igual a 1 A. Ahora se puede hallar la intensidad de la corriente que fluye por el amperímetro. Es igual a

$$I_0 - I_1 = 3 \text{ A}.$$

124. Tal que las velocidades de las bolitas primero son constantes el muelle no está deformado. Después de que la primera bolita da en la pared su velocidad se cambia en la inversa. Las bolitas comienzan a moverse una al encuentro de la otra con velocidades iguales en el valor absoluto, y el muelle se comprime (fig. 183, b). Mientras tanto el centro de masas del sistema se halla inmóvil. Permanece inmóvil también al extenderse el muelle, cuando las bolitas adquieran velocidades iguales en módulo y opuestas en dirección (fig. 183, c). De la ley de conservación de la energía se deduce que en el momento, cuando la primera bolita da en la pared, los valores absolutos de velocidades de las bolitas son iguales a los iniciales (fig. 183, d). Después de la colisión de la bolita con la pared su velocidad vuelve a cambiar en la opuesta (fig. 183, e). Después de ello las bolitas se mueven de la pared con velocidades iguales. Ya que en el momento de la colisión de la bolita con la pared el muelle no se halla deformado, el mismo sigue siendo no deformado durante el movimiento ulterior del sistema.

125. La energía que adquiere la zaeta con el disparo es igual al trabajo de la fuerza que actúa sobre la zaeta de parte de la cuerda. Esta fuerza puede ser hallada como la resultante $\vec{F}$ de las fuerzas de elasticidad de ambas mitades de la cuerda (fig. 184). Si el ángulo formado por la cuerda en los puntos A y B con la línea AB se designa con α, es fácil

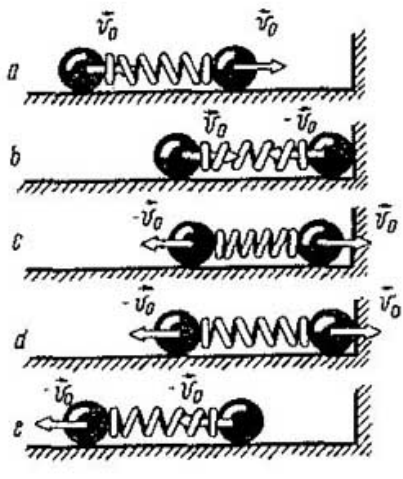


Fig. 183

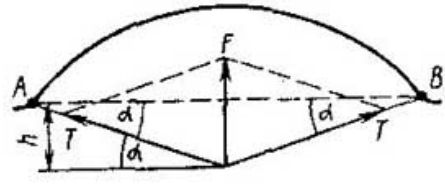


Fig. 184

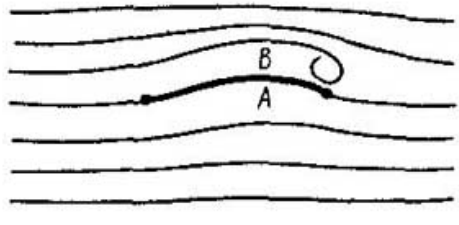


Fig. 185

hallar que $F = 2T \operatorname{sen} \alpha$. Ya que la cuerda se aparta a la distancia pequeña en comparación con su longitud, el ángulo α es pequeño. Por ello $\operatorname{sen} \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ y

$$F = 2T\alpha.$$

Tal que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l/2},$$

entonces

$$F = 4T\frac{h}{l}.$$

De este modo, la fuerza que actúa en la zaeta es igual a la flecha de flexión h. Por ello el trabajo de esta fuerza es igual a la media aritmética de la fuerza multiplicada por h_0:

$$A = F_{med}h_0 = 2T\frac{h_0^2}{l}.$$

Pero el trabajo A es igual a la energía cinética que adquiere la zaeta con el disparo. Esa misma energía debe ser igual a la energía potencial de la zaeta en el punto superior de la elevación. Por consiguiente,

$$mgH = 2T\frac{h_0^2}{l}.$$

De aquí

$$H = \frac{2Th_0^2}{lmg} \approx 6{,}25 \text{ m}.$$

126. Supongamos que en cierto lugar la bandera se halla algo doblada (fig. 185). En este caso, en la parte superior, al contornear el saliente, la velocidad del viento es mayor, mientras que en la parte de abajo, en el área de concavidad de la bandera, la misma es menor que la velocidad del viento lejos de la bandera. De la ley de Bernulli se deduce que en este caso la presión del aire en el punto A es mayor que la presión en el punto B. Por ello, el saliente formado ha de ir aumentando. Además, a efecto de formarse torbellinos detrás del saliente, la presión, que reina allí, es menor que la presión delante del saliente y en virtud de ello el saliente va a desplazarse hacia el extremo de la bandera. De esta manera la concavidad formada eventualmente en la bandera irá aumentando. Si además se toma en consideración que merced a la formación de los torbellinos, al ser contorneada incluso una bandera plana, siendo uniforme el empuje, la presión a diferentes lados de la bandera puede ser diferente y por ello van a formarse con facilidad pequeñas flexiones de

la superficie. Llega a ser claro por qué la bandera es ondeada con el viento.

127.La presión en el codo izquierdo (fig. 186) es igual a la presión de vapor saturado. Pero en el codo derecho se halla tanto el aire como el vapor de agua y la presión es igual a la suma de las presiones parciales del aire y del vapor. Con ello, también es saturado el vapor en el recipiente derecho y su presión parcial es igual a la presión de vapor en el codo izquierdo. Por ello, analizando el equilibrio del agua podemos no tomar en consideración las presiones de vapor en los codos izquierdo y derecho.

Anotemos la condición de equilibrio del agua en el tubo a $t_0 = 20$ °C:

$$\rho g h_0 = p_0,$$

en donde p_0 es el valor de la presión atmosférica normal. Por ello

$$h_0 \approx \frac{p_0}{\rho g} = 10 \text{ m}.$$

A la temepratura de 100 °C la presión del aire en el codo derecho adquirirá cierto valor p, mientras que la diferencia de niveles del agua en los codos será igual a

$$h = \frac{p}{\rho g}. \qquad (1)$$

Las presiones p y p_0 se hallan enlazadas por la relación

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}.$$

Ya que

$$l - l_0 = \frac{1}{2}(h - h_0),$$

$$V_0 = l_0 s, \quad V = ls,$$

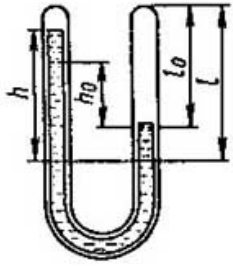


Fig. 186

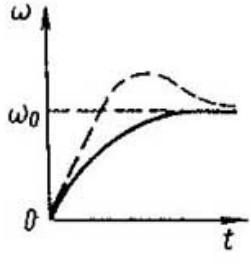


Fig. 187

(en donde s es superficie de corte del tubo), entonces

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} \frac{l_0}{l} = p_0 \frac{T}{T_0} \frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}(h - h_0)}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1), obtenemos:

$$h = \frac{p_0}{\rho g} \frac{T}{T_0} \frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}\Delta h} = h_0 \frac{T}{T_0} \frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}\Delta h}.$$

Si $\frac{1}{2}\Delta h \ll l_0$, menospreciando el valor $\frac{1}{2}\Delta h$ en comparación con l_0, obtenemos el resultado que difiere poco del preciso:

$$h \approx h_0 \frac{T_0}{T} = 13 \text{ m}.$$

128. Ya que después de establecerse la velocidad de anillo su energía cinética no cambia, la variación de la energía potencial ha de ser igual a las pérdidas de calor en el anillo.

Si la velocidad estacionaria del anillo es igual a v, la FEM de inducción, que se excita en el anillo durante su movimiento, es igual en módulo a

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta Fl}{\Delta t}.$$

Aquí Fl es el flujo magnético que atraviesa el anillo. Tal que

$$Fl = \frac{\pi d^2}{4} B = \frac{\pi d^2}{4} B_0 (1 + \alpha H),$$

entonces

$$\frac{\Delta Fl}{\Delta t} = \frac{\pi d^2}{4} B_0 \frac{H \cdot \alpha}{\Delta t}.$$

Pero

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = v.$$

Por ello

$$\mathcal{E} = \frac{\pi d^2}{4} B_0 \alpha v$$

y por el anillo fluye la corriente

$$I = \frac{\pi d^2 B_0 \alpha v}{4R}.$$

Si la masa del anillo es igual a m y en el tiempo t éste desciende a la altura h, entonces según la ley de conservación de la energía

$$mgh = I^2Rt.$$

Ya que $\frac{h}{v} = v$, entonces

$$mgv = I^2R.$$

ó

$$mgv = \frac{\pi^2 d^4 B_0^2 \alpha^2 v^2}{16}.$$

De ahí

$$v = \frac{16\,mg}{\pi^2 d^4 B_0^2 \alpha^2}$$

129. Ya que antes de conectarse la carga el momento de fuerzas externas que actúan en el inducido es constante, éste gira con la aceleración angular constante y la velocidad del mismo aumenta proporcionalmente al tiempo.

Tras conectarse la carga por el devanado del inducido fluirá la corriente eléctrica. En virtud de ello sobre el inducido en el campo magnético del estator actuará el momento de fuerzas proporcional (al igual que la fuerza que actúa en el campo magnético sobre el conductor corriente) a la intensidad de la corriente eléctrica. Este momento frena el giro del inducido. Ya que la corriente eléctrica que fluye por el devanado del inducido es proporcional a la FEM de inducción que surge en el devanado, mientras que la FEM de inducción, a su vez, es proporcional a la velocidad de variación del flujo magnético que atraviesa al devanado, o sea a la velocidad angular de rotación del inducido, con cierta velocidad angular ω_0 el momento de la fuerza que obra sobre el inducido de parte de la carga es igual al momento de la fuerza de frenado que actúa sobre el inducido en el campo magnético. Justamente esta velocidad angular ω_0 es la velocidad de giro estacionaria del inducido.

El gráfico de dependencia entre la velocidad de giro del inducido y el tiempo se muestra con línea continua en la figura 187 para el caso, cuando la velocidad de giro del inducido en el momento de conectarse la carga fue menor que ω_0 y con línea intermitente para el caso, cuando la misma fue mayor que ω_0.

130. Cuando la distancia l entre los cubos es mínima o máxima, ambos cubos se mueven con la velocidad igual $\vec{v}$ y la energía cinética del sistema es igual a $2\frac{mv^2}{2} = mv^2$. Con ello la energía potencial del sistema es igual a la energía potencial del muelle comprimido, o sea a $\frac{kx^2}{2}$ (en

donde la variación del largo del muelle se considera positiva, si la longitud l del muelle es menor que l_0 y negativa, si la longitud l del muelle es mayor que l_0). La energía total del sistema es igual a la suma de las energías cinética y potencial, o sea a $mv^2 + \frac{kx^2}{2}$. Ya que el sistema adquirió esta energía merced al trabajo de la fuerza $\vec{F}$, entonces

$$FL = mv^2 + \frac{kx^2}{2}, \qquad (1)$$

en donde L es la distancia que había recorrido el cubo izquierdo (según la figura) hasta el momento, cuando el largo del muelle llegó a ser mínimo. Si S es la distancia recorrida por el centro de masas del sistema (fig. 188), entonces

$$L = S + \frac{1}{2} l_0 - \frac{1}{2}(l_0 - x) = S + \frac{x}{2}.$$

La velocidad $\vec{v}$ de los cubos es igual a la velocidad del centro de masas del sistema. Ya que en el sistema actúa una fuerza externa

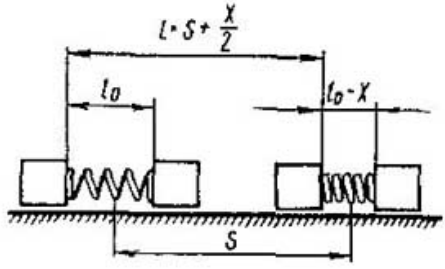


Fig. 188

constante, el centro de masas se mueve uniformemente acelerado con la aceleración $a = \frac{F}{m}$. Por ello, designando con t el tiempo a partir del momento inicial de movimiento hasta el momento, cuando la longitud del muelle llegó a ser igual a $l_0 - x$, se puede anotar:

$$v = at, \; L = \frac{at^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Sustituyendo estas expresiones para v y L en la ecuación (1), obtenemos:

$$F\left(\frac{at^2}{2} + \frac{x}{2}\right) = ma^2t^2 + \frac{kx^2}{2}.$$

De aquí

$$\frac{F^2t^2}{4m} + \frac{x}{2}F = \frac{F^2t^2}{4m} + \frac{kx^2}{2},$$

o

$$Fx = kx^2.$$

Por consiguiente, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{F}{k}$.

De este modo, la distancia mínima entre las cargas es igual a

$$l_{mín} = l_0 - x_2 = l_0 - \frac{F}{k}.$$

mientras que la máxima es

$$l_{máx} = l_0 - x_1 = l_0.$$

131. La cámara obscura es una caja provista de un orificio. En la película fotográfica dispuesta en la cámara cae un haz ancho de rayos que procede de cada punto del objetivo a fotografiar (fig. 189). Para que el tigre salga rayado en la foto, las áreas, en las que caen los rayos que proceden de los puntos próximos de las franjas adyacentes en la piel del tigre, no deben solapar una a otra. Para ello es necesario que la película se encuentre del orificio a la distancia

$$x > \frac{d}{2\,\mathrm{tg}\alpha}.$$

Ya que

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\frac{l}{2} - l}{L + x},$$

enconces

$$x > \frac{d\,(L + x)}{l}.$$

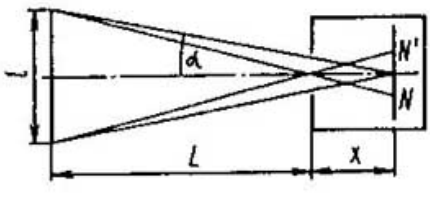


Fig. 189

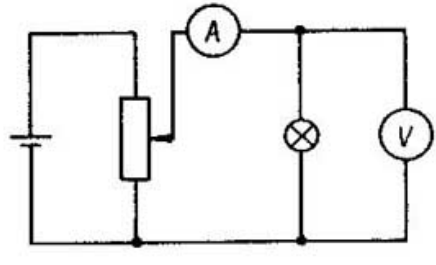


Fig. 190

De aquí

$$x > \frac{dL}{l\,(1 - d/l)}\,.$$

Tal que $\frac{d}{l} \ll 1$, entonces, menospreciando este valor en comparación con 1, obtenemos:

$$x > \frac{dL}{l} = 10 \text{ cm}.$$

De esta manera, la profundidad de la cámara debe ser mayor que 10 cm.

132. Para realizar las mediciones es cómodo valerse de la instalación cuyo esquema se ofrece en la figura 190. Variando la tensión en la bombilla con ayuda del potenciómetro se lleva a cabo una serie de mediciones de la intensidad de la corriente eléctrica que pasa por la bombilla y de la tensión en la misma. Seguidamente, según los resultados de cada medición se calcula la resistencia de la bombilla:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1},\ R_2 = \frac{U_2}{I_2},\ \ldots\,.$$

A base de estos datos se construye el gráfico de dependencia entre la resistencia de la bombilla y la intensidad de la corriente eléctrica. El crecimiento de la resistencia de la bombilla con el aumento de la intensidad de la corriente se explica por la dependencia de temperatura de la resistencia del filamento de la bombilla.

133. Al sumergir una misma carga en dos líquidos diferentes las fuerzas de Arquímedes que actúan en la misma se determinan como sigue:

$$F_1 = \rho_1 gV,\ F_2 = \rho_2 gV, \qquad (1)$$

en donde ρ_1 y ρ_2 son las densidades de los líquidos, una de las cuales (por ejemplo, ρ_1) es desconocida.

Los valores F_1 y F_2 pueden ser determinados por la diferencia de indicaciones del dinamómetro al que se halla suspendida la carga en los casos, cuando la última se encuentra en el aire y en los líquidos (fig. 191):

$$F_1 = P - P_1,\ F_2 = P - P_2, \qquad (2)$$

en donde P es la indicación del dinamómetro, cuando la carga se hallaba en el aire, P_1 y P_2 las indicaciones del dinamómetro, cuando la carga se encuentra en los líquidos de densidades conocida y desconocida. De las ecuaciones (1) y (2) hallamos la densidad desconocida del líquido:

$$\rho_2 = \frac{F_2}{gv} = \frac{F_2}{F_1}\,\rho_1 = \frac{P - P_2}{P - P_1}\,\rho_1\,.$$

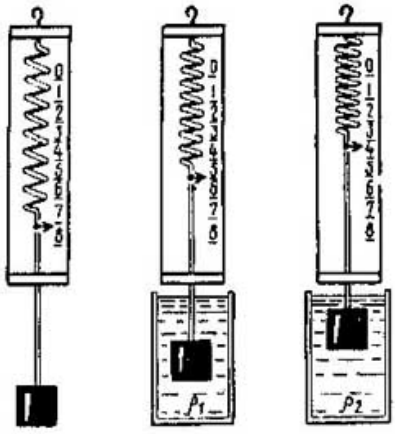


Fig. 191

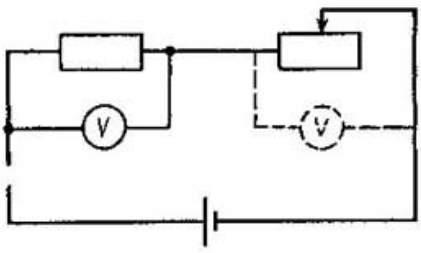


Fig. 192

134. Si la resistencia R_v del voltímetro es mucho mayor que las resistencias R_x del reóstato y R del resistor, para determinar la resistencia R_x del reóstato se puede montar el circuito según el esquema reproducido en la figura 192.

Al medir la tensión U_1 en el resistor y U_2 en el reóstato, obtenemos:

$$R_x = \frac{U_2}{I} = \frac{U_2}{U_1} R.$$

135. El cubo debe ser suspendido en dos hilos a uno de los cuales ha de fijarse el dinamómetro. En este caso las indicaciones del dinamómetro serán iguales a

$$F = \frac{mg}{2}.$$

Al estar satisfecha la condición $mg \leqslant 2 F_{máx}$ se mide la fuerza F y seguidamente se halla la masa del cuerpo por la fórmula

$$m = \frac{2F}{g}.$$

136. Echemos en el calorímetro 50 g de agua y pongámoslo en el hornillo eléctrico. Adoptemos que el calorímetro recibe del hornillo en una unidad de tiempo la cantidad q de calor. Cronometremos el tiempo τ_1 preciso para que el agua se caliente desde 80 hasta 90 °C. Seguidamente cronometremos el tiempo τ_2 necesario para que el agua se evapore (por el inicio del cronometraje se toma ahora el momento inicial de ebullición del agua). Ya que los valores de temperatura de 80–90 °C y de 100 °C son próximos, adoptemos que las pérdidas de calor útiles del hornillo ηq en ambos casos es igual. Por ello

$$\eta q \tau_1 = cm\,(t_2 - t_1),\ \eta q \tau_2 = mr,$$

en donde c y m son el calor específico y la masa del agua, r es el calor específico de vaporización del agua.

De aquí

$$r = c\,(t_2 - t_1)\frac{\tau_2}{\tau_1}.$$

El resultado obtenido tiene carácter aproximado, ya que hemos menospreciado la capacidad calorífica del recipiente y la diferencia de las pérdidas de calor durante el calentamiento y la ebullición del agua.

137. Con ayuda de la balanza determinamos la masa de la sal m, la masa M del agua (según la diferencia entre las masas del calorímetro con agua y del calorímetro vacío). Medimos asimismo la temperatura inicial del agua t_0.

Una vez echada la sal al agua, la temperatura de la última desciende hasta el valor de t_1. De la ecuación del equilibrio térmico

$$c\,(m + M)\,(t_0 - t_1) = m\lambda$$

hallamos el calor específico λ de disolución de la sal:

$$\lambda = c\,(t_0 - t_1) + \frac{cM\,(t_0 - t_1)}{m}.$$

138. El problema puede ser solucionado comparando el tiempo de calentamiento τ_1 de la naftalina hasta el punto de fusión (79 °C) con el tiempo τ_2 de fusión de la misma.

A base de la ley de conservación de la energía anotamos:

$$\eta q \tau_1 = cm\,(t_1 - t_2),\ \eta q \tau_2 = m\lambda,$$

en donde q es la cantidad de calor que recibe el recipiente con naftalina a partir del calentador (hornillo eléctrico) en 1 s. De aquí

$$\lambda = \frac{\tau_2}{\tau_1} c\,(t_1 - t_2).$$

Para que el trabajo se realice con mayor precisión se ha de registrar la temperatura de la naftalina dentro de cada minuto y construir el gráfico de dependencia entre la temperatura de la naftalina y el tiempo del calentamiento de la misma. Para evitar la disminución de la masa de la sustancia a efecto de la sublimación de la naftalina, se recomienda cerrar el recipiente.

139. Para solucionar el problema es necesario montar una instalación con arreglo a la figura 193. Aplicando la ecuación del estado de gas para el aire contenido en el matraz antes de su evacuación (con la presión atmosférica p_{atm}) y después de la misma, obtenemos:

$$p_{atm} V = \frac{m_1}{M} RT, \; pV = \frac{m_2}{M} RT.$$

De aquí

$$R = \frac{(p_{atm} - p) M}{T (m_1 - m_2)}.$$

La presión p se registra con el manómetro, el volumen del matraz V está dado, la diferencia de masas $m_1 - m_2$ se determina pesando el matraz antes y después de la evacuación del aire, la temperatura T se registra con el termómetro.

Con fines de seguridad hay que alojar el matraz en un saquete de tela.

140. Para investigar la dependencia entre la resistencia del termistor y la temperatura se arma el circuito con arreglo al esquema ofrecido en la figura 194. Previamente el termistor es sumergido en un recipiente con agua, el cual se coloca sobre el hornillo eléctrico y se

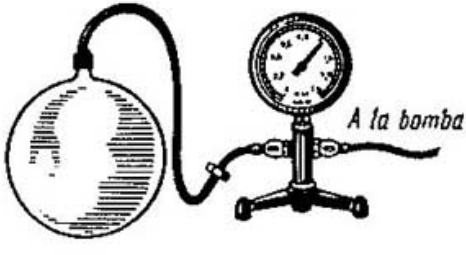


Fig. 193

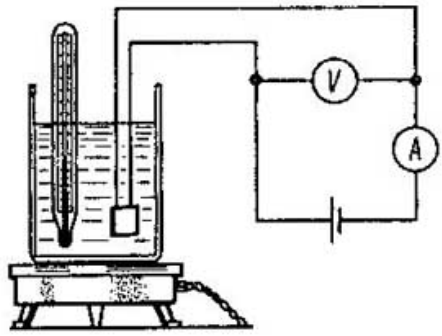


Fig. 194

calienta. Dentro de cada 10 °C se mide la resistencia del termistor y los resultados de mediciones se anotan en la tabla. A base de los datos de la tabla se construye el gráfico de dependencia entre la resistencia del termistor y la temperatura. Hay que echar tanta cantidad de agua en el recipiente que su calentamiento se efectúe bastante lento, el termistor se caliente bien y haya tiempo para tomar lectura de las indicaciones de los instrumentos para la temperatura dada. Como regla, a medida que va subiendo la temperatura la resistencia de los termistores disminuye.

141. La resistencia inductiva de la bobina a la corriente alterna de frecuencia ν se determina por la fórmula

$$X_L = 2\pi\nu L.$$

Si la resistencia activa de la bobina es sustancialmente menor que su resistencia inductiva (para las bobinas del transformador de escuela la relación $R \ll X_L$ se cumple), la ley de Ohm para el circuito cuyo esquema se reproduce en la figura 195 se anota como sigue:

$$I = \frac{U}{2\pi\nu L}.$$

De aquí

$$L = \frac{U}{2\pi\nu I}.$$

Si se toma en consideración la resistencia activa R de la bobina y, consiguientemente, la ley de Ohm se anota como

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}},$$

entonces para la inductancia de la bobina obtenemos la fórmula siguiente:

$$L = \frac{\sqrt{U^2 - I^2R^2}}{2\pi\nu I}.$$

La resistencia activa R puede medirse con el ohmímetro.

142. Para que el perdigón comience a hundirse no es necesario que se derrita todo el nielo. Es suficiente que la densidad media del hielo con perdigón llegue a ser igual a la densidad del agua. Si la masa del hielo restante con ello se designa con M_1, entonces la condición de que el perdigón comenzará a hundirse se anotará como sigue:

$$\frac{M_1 + m}{V} = \rho_a$$

Pero el volumen V del hielo y del perdigón es igual a la suma de ambos volúmenes:

$$V = \frac{M_1}{\rho} + \frac{m}{\rho_{Pb}}.$$

Por ello

$$M_1 + m = \rho_a \left(\frac{M_1}{\rho_h} + \frac{m}{\rho_{Pb}}\right).$$

De aquí

$$M_1 = m\,\frac{(\rho_{Pb} - \rho_a)\,\rho_h}{(\rho_a - \rho_h)\,\rho_{Pb}} = 8{,}2\,m.$$

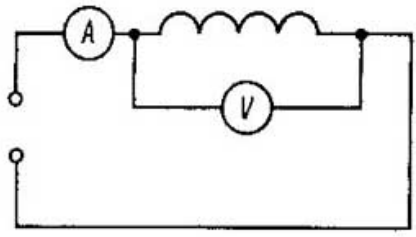


Fig. 195

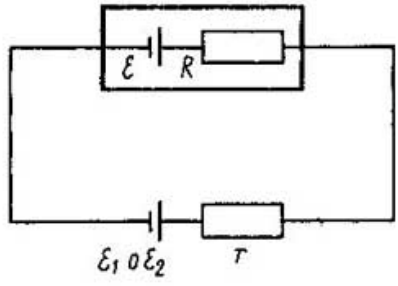


Fig. 196

Debe derretirse la masa del hielo

$$\Delta M = M - M_1 = 100\ g - 8{,}2 \cdot 5\ g = 59\ g.$$

Para ello es necesaria la siguiente cantidad de calor

$$Q = \lambda \cdot \Delta M = 3{,}3 \cdot 10^5\ J/kg \cdot 59 \cdot 10^{-3}\ kg = 19{,}5 \cdot 10^3\ J.$$

143. El esquema posible se muestra en la figura 196. Al acoplar tal caja al manantial de FEM $\mathcal{E}_1$ por el circuito debe fluir la corriente

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_1}{R + r}. \qquad (1)$$

Al acoplar a la caja el manantial de FEM $\mathcal{E}_2$ por el circuito fluirá la corriente

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}}{R + r}. \qquad (2)$$

Solucionando conjuntamente las ecuaciones (1) y (2) hallaremos

$$\mathcal{E} = \frac{I_1\mathcal{E}_2 + I_2\mathcal{E}}{I_1 + I_2} = 10\ V,$$

$$R = 1\ Ohm.$$

144. Reenumeremos las cargas como se muestra en la figura 30 y orientemos el eje X a la derecha. Está claro que entonces ninguna de las cargas puede tener la aceleración negativa.

Demostremos que las cargas 3 y 4 se mueven como un cuerpo entero. Para ello supongamos lo contrario: sea que la carga 3 resbala por la carga 4. Entonces entre las mismas surge la fuerza de rozamiento

$$F_{roz} = \mu mg,$$

mientras que en el hilo surge la fuerza de elasticidad

$$T > \mu mg.$$

Con ello la aceleración de la carga 2 sería dirigida a la izquierda lo que no puede ser. Por consiguiente, las aceleraciones 2, 3 y 4 son iguales. Designemos la aceleración de estas cargas con $\vec{a}_2$ y la aceleración de la carga 1 con $\vec{a}_1$. Ahora examinemos dos casos.

C a s o 1. Sea que las cargas 1 y 2 se hallan en reposo relativo y $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$. Designemos el módulo de la fuerza de rozamiento de reposo entre las mismas como F_1, el módulo de la fuerza de rozamiento entre las cargas 3 y 4 como F_2 y el módulo de la fuerza de elasticidad del hilo como T. Entonces:

para la carga 1

$$F - F_1 = Ma_1,$$

para la carga 2

$$F_1 - T = ma_2,$$

para la carga 3

$$T - F_2 = ma_2,$$

para la carga 4

$$F_2 = Ma_2.$$

Solucionando este sistema de ecuaciones obtenemos:

$$F_1 = \frac{2m + M}{2(M+m)} F, \quad a_1 = a_2 = \frac{F}{2(M+m)}.$$

Este mismo resultado puede ser obtenido también por otro método. Dado que el rozamiento entre todas las superficies es el rozamiento de reposo, entonces el sistema de cargas se mueve como un cuerpo de masa $M = 2(M + m)$. Por ello

$$\vec{F} = M\vec{a}_1, \quad \vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{2(M+m)}.$$

C a s o 2. Sea que la carga 2 resbala por la carga 1. Entonces en la carga 1 actúa la fuerza de rozamiento

$$F'_{roz} = \mu mg$$

y esta carga recibe la aceleración

$$a_1 = \frac{F - \mu mg}{m}$$

El sistema de cargas 2, 3 y 4 se mueve como un solo cuerpo, cuya masa es $M_0 = 2m + M$, con la aceleración

$$a_2 = \frac{\mu mg}{2m + M}.$$

El primer caso se realiza si

$$F \geqslant \frac{2\mu m (m + M) g}{2m + M}.$$

145. Al patinador le comunica la aceleración centrípeda la fuerza de rozamiento con el hielo

$$F_{roz} = \mu N,$$

en donde $\vec{N}$ es la fuerza de reacción normal de hielo (fig. 197, a). Ya que el patinador no se desplaza en el sentido vertical, la fuerza $\vec{N}$ es igual en módulo a la fuerza de gravedad $\vec{Mg}$ que actúa en el patinador. Por ello

$$F_{roz} = \mu mg \text{ y } \frac{mv^2}{R} = \mu mg.$$

De aquí

$$v = \sqrt{\mu gR}.$$

En el viraje el patinador recorre la distancia

$$S = \pi R$$

en el tiempo

$$t = \frac{S}{v} = \pi \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \qquad (1)$$

Cuanto mayor es el radio de la circunferencia por la que se mueve el patinador tanto mayor es este tiempo. Aunque al aumentar el radio de viraje crece la velocidad máxima del patinador, aun más aumenta la distancia recorrida por él: mientras la velocidad es proporcional a $\sqrt{R}$ la distancia recorrida es proporcional a R. Justamente por ello el patinador trata de pasar el viraje lo más cerca posible al borde interior.

Ahora examinemos el movimiento del ciclista en el velódromo inclinado. La aceleración centrípeda le es comunicada por la resultante de la fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}$ y de la fuerza $\vec{N}$ de reacción del apoyo (fig. 197, b). Al proyectar estas fuerzas sobre el eje X, obtenemos:

$$F_{roz} \cos \alpha + N \operatorname{sen} \alpha + \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

Ya que el ciclista no se desplaza en el sentido vertical, la suma de

proyecciones sobre el eje Y de todas las fuerzas que actúan sobre el ciclista es igual a cero:

$$N \cos \alpha - F_{roz} \operatorname{sen} \alpha - mg = 0. \qquad (3)$$

Tomando en consideración que $F_{roz} = \mu N$ hallemos de las ecuaciones (2) y (3) la velocidad máxima con la cual puede moverse el ciclista:

$$v = \sqrt{gR \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}}.$$

Esta velocidad depende no sólo del radio de la circunferencia, sino también del ángulo de inclinación del velódromo al horizonte. Con el perfil del velódromo que se muestra en la figura 197, b el ángulo de inclinación no cambia. Si $\alpha = \alpha_0 = \operatorname{arctg}(1/\mu)$, la velocidad máxima de movimiento del ciclista adquiere el valor infinito. Esto significa que la velocidad del ciclista puede ser cualquiera[1].

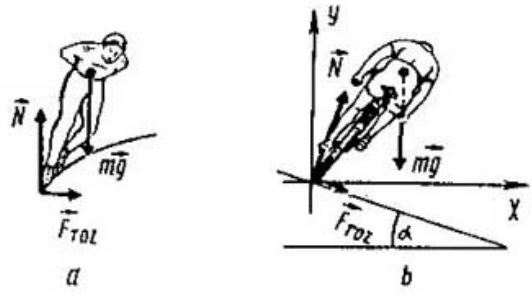


Fig. 197

El tiempo necesario al ciclista para recorrer el viraje de radio R se determina como sigue:

$$t = \frac{\pi R}{v} = \pi \sqrt{\frac{R}{g} \frac{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}{\mu + \operatorname{tg} \alpha}} = \pi \sqrt{\frac{R}{g} \operatorname{tg} (\alpha_0 - \alpha)}.$$

Si el ciclista pasa el viraje más lejos del borde, cambia no sólo el radio de viraje, sino también el ángulo α de inclinación del velódromo al horizonte. Merced a ello se reduce el tiempo de recorrido del viraje.

146. Cada uno de los planos se halla en equilibrio gracias a la acción en los mismos de tres fuerzas: la fuerza de elasticidad $\vec{T}$ que obra del lado del dinamómetro, la fuerza $\vec{F}_0$ de presión del aire atmosférico

[1] La velocidad del ciclista en este caso se determina por las fuerzas de resistencia y la potencia que desarrolla el mismo.

($F_0 = pS$) y la fuerza de reacción del hemisferio (fig. 198). En el momento, cuando el plano se desprende del hemisferio, la fuerza de reacción del hemisferio es igual a cero; por ello

$$T_{máx} = F_0 = p_0 S = p_0 \pi R^2 \approx 12{,}6 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

147. Ya que la bolita flota a flor de agua, la densidad de material de la misma es menor que la densidad del agua: $\rho_b < \rho_a$. Supongamos que la bolita se encuentra a la distancia R del eje de un recipiente giratorio.

Si la densidad de la bolita fuera igual a la densidad del agua ρ_a, la misma estaría a una distancia invariable del eje de rotación. La aceleración centrípeda sería comunicada a tal bolita por la resultante de la fuerza de gravedad y de las fuerzas de presión del agua circundante. En módulo esta resultante sería igual a

$$m\omega^2 R = \rho_a V \omega^2 R,$$

en donde ω es la velocidad angular de rotación del recipiente, V, el volumen de la bolita.

En la bolita de densidad ρ_b, dispuesta en el mismo punto, de parte del agua circundante actúa una fuerza igual que comunica ahora a la bolita la aceleración

$$a = \frac{\rho_a}{\rho_b} \omega^2 R.$$

Esta aceleración es mayor que la necesaria para la rotación por la circunferencia de radio R. Por consiguiente, la bolita se acercará al eje de rotación del recipiente. Consiguientemente, la posición de equilibrio de la bolita se encuentra en el eje del recipiente.

148. La luz pasa a través del prisma de vidrio en el tiempo

$$t = \frac{l}{c'} = \frac{ln}{c},$$

mientras tanto el prisma se desplaza a la distancia

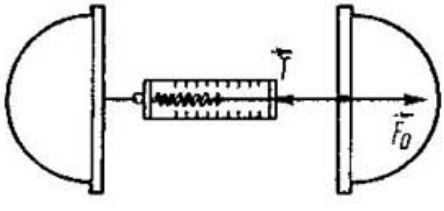


Fig. 198

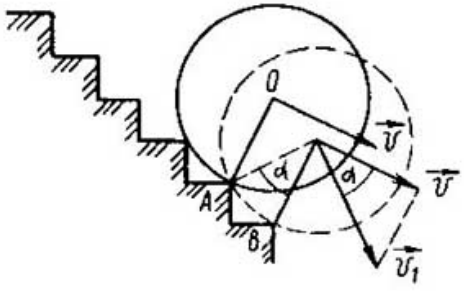


Fig. 199

$$x = vt = \frac{vln}{c}.$$

A esta distancia se acorta la trayectoria de la luz en el aire (en comparación con la trayectoria que pasa la luz en el caso, cuando el prisma se halla inmóvil). Por consiguiente, el tiempo en el que la luz llega a la pantalla se reduce en

$$\Delta t = \frac{x}{c} = \frac{vln}{c^2}.$$

Notemos que, tomados en consideración los efectos relativistas, la velocidad de la luz en el prisma de cristal en movimiento ha de tomarse igual no a $c' = \frac{c}{n}$, sino a

$$c'' = \frac{c' + v}{1 + \frac{c'v}{c^2}} = \frac{(c + nv)\,c}{nc + v}.$$

Al mismo tiempo la longitud del prisma en el sistema fijo de coordenadas no es igual a l, sino a

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Por ello hay que tomar en consideración no sólo el acortamiento de la trayectoria que recorre la luz en el aire merced al movimiento del prisma, sino también el acortamiento de la trayectoria de la luz en el vidrio.

149. Las colisiones del cuerpo de masa m_2 con los cuerpos de masas m_1 y m_3 continuarán hasta que la velocidad del mismo llegue a ser menor que la veloridad de uno de los cuerpos (m_1 o m_3). Pero ya que $m_1 \gg m_2$ y $m_3 \gg m_2$, el impulso y la energía del cuerpo de masa m_2 será mucho menor que el impulso y la energía de estos cuerpos de masas m_1 y m_3. Consiguientemente, anotando la ley de conservación de la energía y del impulso podemos no tomar en consideración la energía y el impulso del cuerpo de masa m_2 después que cesen las colisiones. Designando con $\vec{v_1}$ y $\vec{v_3}$ las velocidades de los cuerpos de masas m_1 y m_3 después que cesen las colisiones se puede anotar:

$$m_3 v_3 - m_1 v_1 = m_2 v,$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{m_2 v^2}{2}.$$

Solucionando estas ecuaciones en conjunto y teniendo en cuenta que $m_1 \gg m_2$ y $m_3 \gg m_2$ hallamos:

$$v_1 = v\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1 m_3 + m_1^2}},$$

$$v_3 = v\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 m_3 + m_3^2}}.$$

150. Después de la colisión con el peldaño en el punto A (fig. 199) la velocidad $\vec{v}$ de la bola será dirigida perpendicularmente al radio AO. En el curso del movimiento ulterior de la bola su centro de masas va a moverse por la circunferencia de radio R con el centro en el punto A (ya que $R \gg a$), y hasta la próxima colisión de la bola con el peldaño su centro de masas descenderá a la altura a. En el momento, cuando la bola choque con el peldaño en el punto B, la velocidad $\vec{v}_1$ de su centro de masas será tal que

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mga,$$

de ahí

$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2ga}\ .$$

En el siguiente choque inelástico con el peldaño se conserva sólo la componente de la velocidad de la bola perpendicular al radio. Con la velocidad media estacionaria de movimiento de la bola esta componente, tal vez, debe ser igual a $\vec{v}$. Tal qué

$$v = v_1 \cos\alpha,$$

entonces

$$v = \sqrt{v^2 + 2ga}\cos\alpha\ .$$

Pero siendo $a \ll R$ obtenemos:

$$\alpha \approx \frac{a\sqrt{2}}{R},\quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} \approx \sqrt{1 - \frac{2a^2}{R^2}}$$

Consiguientemente,

$$v = \sqrt{(v^2 + 2ga)\left(1 - \frac{2a^2}{R^2}\right)},$$

de ahí

$$v = \sqrt{\frac{R^2 - 2a^2}{a}g} \approx \sqrt{g\frac{R^2}{a}}.$$

151. El trabajo que realiza el émbolo se determina por la fórmula

$$A = pV.$$

Justamente este trabajo es igual a la variación de la energía cinética del agua.

152. Hallemos la masa de los vapores de agua que se producen en la combustión de la masa m de hidrógeno. En la ecuación de reacción de combustión del hidrógeno

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

se ve que dos moléculas de hidrógeno se unen con una molécula de oxígeno. Como resultado se obtienen dos moléculas de vapor de agua. Esto significa que para la combustión de un kilomol de hidrógeno se necesita la mitad de un kilomol de oxígeno y de la reacción resulta un kilomol de agua. De la combustión de $\nu = \frac{m}{M}$ kilomoles de hidrógeno se obtiene la misma cantidad de kilomoles de vapor de agua (donde $M_h = 2$ kg/mol). Por ello de la combustión de la masa m de hidrógeno se obtiene la masa

$$m_1 = \nu M_v = \frac{18}{2} m = 9m$$

de vapor de agua (donde $M_v = 18$ kg/mol). Esta masa de vapores de agua sale de la tobera del motor en 1 s. Ya que la superficie de la tobera de salida del motor es conocida, se puede hallar la velocidad $\tilde{v}$ del gas que sale de la tobera. En 1 s de la tobera del motor será expulsado el volumen de vapor $V = vS$. Si la densidad del vapor es igual a ρ, la masa de este volumen de vapor será igual a

$$m_1 = \rho v S.$$

De ahí

$$v = \frac{m_1}{\rho S} = \frac{9m}{\rho S}.$$

De la ecuación de Clapeyrón – Mendeleyev

$$pV = \frac{m_1}{M_v} RT$$

(en donde R es la constante de los gases) hallamos la densidad desconocida del vapor:

$$\rho = \frac{m_1}{V} = \frac{pM_v}{RT}.$$

Ya que en el tiempo Δt de la tobera del cohete se expulsa la masa de vapor $m_i \Delta t$ con el impulso $m_i \Delta t \cdot \vec{v}$, en el gas actúa la fuerza

$$\vec{F}_1 = \frac{m_i \Delta t \cdot \vec{v}}{\Delta t} = m_i \vec{v}.$$

Una fuerza igual en módulo, pero dirigida en sentido opuesto, actúa en el motor. La fuerza total que obra en el motor (la fuerza de empuje del motor) es igual a la suma de la fuerza reactiva $-\vec{F}_1$ con la fuerza de presión estática $F_2 = pS$, o sea

$$F = m_i v + pS \approx \rho v^2 S = \frac{81 m^2 RT}{SM_v}.$$

Habitualmente las toberas de los motores a reacción están construidas de tal modo que la presión p del gas, que sale de la tobera, es pequeña. Por ello el segundo miembro en la expresión para la fuerza de empuje del motor es pequeño en comparación con el primero y al hacer los cálculos puede ser menospreciado.

153. Los instrumentos deben ser conectados tal como se muestra en la figura 200. Con tal conexión los puntos O, A y B tendrán iguales potenciales (la resistencia del amperímetro es pequeña y la caída de la tensión en el mismo puede ser menospreciada). Consiguientemente, la corriente no fluirá a través de los resistores acoplados entre los puntos O, A y B. Esto significa que el amperímetro acusará la corriente que fluye por el resistor acoplado entre los puntos O y C. El voltímetro indicará la caída de la tensión en este resistor. Al dividir la indicación del voltímetro en la indicación del amperímetro hallaremos la resistencia del resistor.

154. Ya que el hilo AB permanece vertical, en la bola de masa M durante el movimiento del sistema no actúan las fuerzas horizontales. Esto significa que las fuerzas horizontales tampoco actúan en el sistema

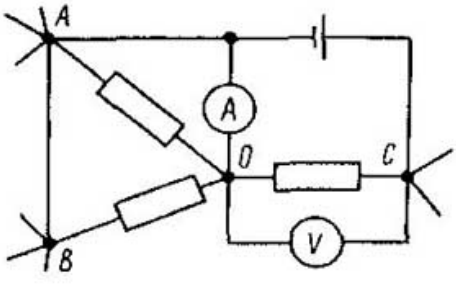


Fig. 200

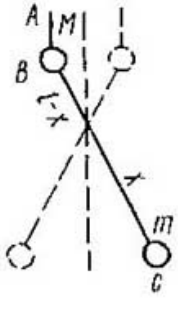


Fig. 201

constituido por dos bolas M y m, y las bolas deben moverse de modo que su centro de masas no se desplazca en el sentido horizontal (fig. 201). Por ello, la bola de masa m se mueve como si estuviese fijada al hilo de largo x (en donde x es la distancia entre la bola y el centro de masas del sistema). El período de oscilaciones de tal péndulo es

$$T = 2\pi \sqrt{x/g}. \qquad (1)$$

Este período, por lo visto, es igual al período de oscilaciones del punto A.

Hallemos ahora x. Con arreglo a la propiedad del centro de masas

$$xm = (l - x) M.$$

De aquí

$$x = l \frac{M}{m + M}. \qquad (2)$$

Sustituyendo esta expresión para x en la fórmula (1), obtenemos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \frac{M}{m + M}}.$$

De aquí

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \frac{m + M}{M}.$$

155. Primero en todas las partículas actúan fuerzas iguales en módulo. Pero las masas de protones son 2000 veces superiores a las masas de positrones. Esto significa que las aceleraciones de los positrones serán 2000 veces mayores que las de los protones. Por ello los positrones se dispersarán rápido a la infinidad, mientras que los protones van a dispersarse a continuación actuando unos en otros. Ello da la posibilidad al calcular las velocidades de los positrones considerar los protones como inmóviles.

Hallemos la energía potencial completa de los positrones antes de la dispersión. Si no existiesen los protones, la energía potencial de interacción de dos positrones sería igual a

$$W = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a \sqrt{2}}.$$

Este es el trabajo que hay que realizar para hacer acercar dos positrones. El potencial del campo que crea cada uno de los protones en el punto, donde se halla un positrón, por lo visto, es igual a

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Por ello la energía potencial completa de los positrones será igual a

$$W_1 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} + 2\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}e + 2\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{e^2}{a}.$$

Toda esta energía potencial se transformará en la energía cinética de los positrones en el caso de su dispersión. Por ello

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{mv^2}{2},$$

o

$$mv^2 = \left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad (1)$$

(las velocidades de ambos positrones en la infinidad son iguales).

Ahora analicemos la dispersión de los protones. Su energía potencial antes de la dispersión, por lo visto, es igual a

$$W_2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}}.$$

Esta energía se transforma en la energía cinética de los protones después de su dispersión:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} = Mu^2, \qquad (2)$$

en donde u es la velocidad del protón.
Al dividir la ecuación (2) por la ecuación (1), obtendremos:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}+1} = \frac{M}{m}\left(\frac{u}{v}\right)^2,$$

de ahí

$$\frac{u}{v} = \sqrt{\frac{m}{M}\frac{1}{4\sqrt{2}+1}} \approx 0{,}01.$$

156. Véase la solución del problema 148.

157. Para cumplir la tarea hace falta determinar las características de voltios-amperios de los elementos que se encuentran en ambas cajas. La característica de voltios-amperios del resistor debe ser lineal, mientras que la característica de voltios-amperios de la bombilla, debido a la dependencia de temperatura de la resistencia de la misma, tendrá el aspecto que se muestra en la figura 202.

158. El rendimiento del plano inclinado puede ser determinado con ayuda de la expresión

$$\eta = \frac{A_p}{A} = \frac{mgh}{Fl},$$

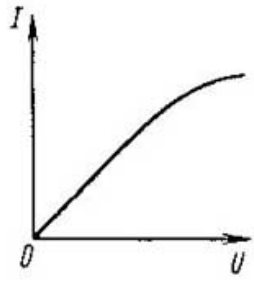


Fig. 202

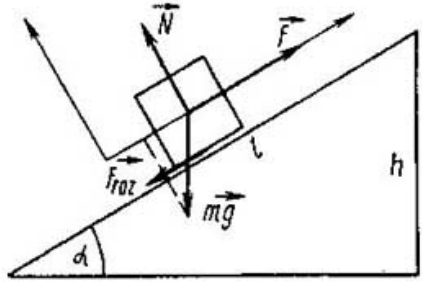


Fig. 203

en donde, según se desprende de la figura 203,

$$F = mg \operatorname{sen} \alpha + \mu\, mg \cos \alpha,$$

en donde μ es el coeficiente de rozamiento, α, el ángulo de inclinación de la regla tribométrica al horizonte.
Por ello

$$\eta = \frac{1}{1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha}.$$

De la expresión obtenida está claro que para determinar la dependencia entre el rendimiento y el ángulo de inclinación del plano al horizonte hay que medir el coeficiente de rozamiento.

Si α_0 es el ángulo de inclinación mínima con el cual la barra se pone a resbalar por el plano, entonces

$$mg \operatorname{sen} \alpha_0 = \mu mg \cos \alpha_0,$$

de ahí

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

De este modo,

$$\eta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

159. Para cumplir la tarea suspenden las bolas de acero y de cera de modelar en unos hilos de igual longitud. Después ladean una de las bolas al ángulo α y la sueltan. Tras ejecutarse la colisión inelástica de las bolas miden el ángulo β de desviación del sistema de dos bolas pegadas (fig. 204).

De la ley de conservación del impulso

$$mv = (m + M)u$$

se puede determinar la masa de la bola de cera de modelar m:

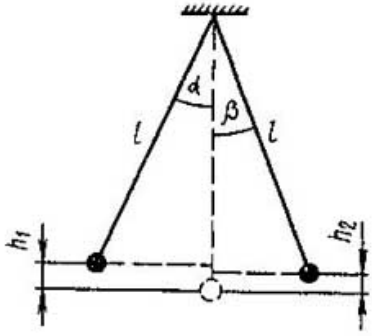


Fig. 204

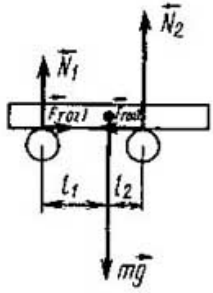


Fig. 205

$$m = \frac{Mu}{v - u},$$

en donde M es la masa de la bola de acero, v, la velocidad de la bola de cera de modelar antes de la colisión y u, la velocidad de las bolas pegadas inmediatamente después de la colisión inelástica.

Expresando las velocidades v y u por medio del largo de hilo l y los ángulos de desviación α y β, obtenemos:

$$v = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl}\,(1 - \cos\alpha) = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl},\ u = 2\,\text{sen}\,\frac{\beta}{2}\sqrt{gl}.$$

Por ello

$$m = \frac{M\,\text{sen}\,\frac{\beta}{2}}{\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} - \text{sen}\,\frac{\beta}{2}}.$$

La pérdida de la energía mecánica en la colisión inelástica de las bolas puede ser determinada de la manera siguiente:

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m+M)\,u^2}{2} = 2gl\left[m\,\text{sen}^2\,\frac{\alpha}{2} - (m+M)\,\text{sen}^2\,\frac{\beta}{2}\right].$$

La parte de la energía mecánica perdida (de su valor inicial) se expresa como sigue:

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = 1 - \frac{m+M}{m}\,\frac{\text{sen}^2\,(\beta/2)}{\text{sen}^2\,(\alpha/2)}.$$

160. Colocar la barra sobre dos varillas de madera (fig. 205) y comenzar a mover lentamente una de las varillas al centro de masas de la

barra. Ud. notará que por turno tiene lugar el deslizamiento de la barra: primero por una varilla y seguidamente por la otra. En el momento, cuando el deslizamiento de la barra por una varilla es seguido de su deslizamiento por la otra, tiene lugar la igualdad

$$F_{roz1} - F_{roz2} = 0,$$

o

$$\mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = 0.$$

De aquí

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Las fuerzas de presión normal N_1 y N_2 pueden ser determinadas aplicando las condiciones de equilibrio de la barra sobre los apoyos (respecto al punto de roce de la barra y de la primera varilla):

$$N_1 + N_2 - mg = 0,$$

$$N_1 \cdot 0 + mgl_1 - N_2 (l_1 + l_2) = 0.$$

De aquí

$$N_1 = \frac{mgl_2}{l_1 + l_2}, \quad N_2 = \frac{mgl_1}{l_1 + l_2},$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Consiguientemente, para la relación buscada de los coeficientes de rozamiento de reposo y de deslizamiento obtenemos:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

161. Sumergir el tubo de vidrio en el recipiente con líquido. Tras cerrar el orificio superior del tubo y levantarlo medimos la variación de la longitud

$$\Delta l = l_2 - l_1$$

de la columna de aire sobre el líquido en el tubo (fig. 206). Utilizando la ley de Boyle-Mariotte obtenemos:

$$p_A S l_1 = (p_A - \rho g h) S l_2,$$

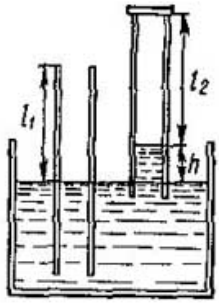


Fig. 206

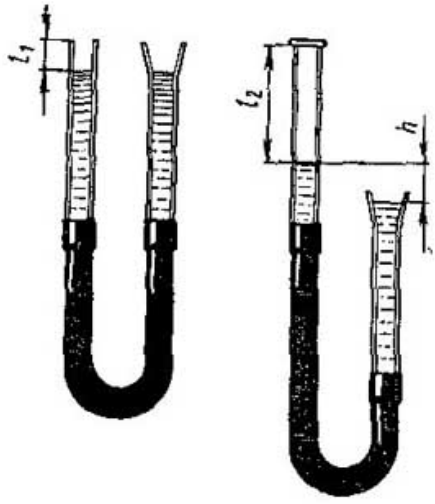


Fig. 207

en donde p_A es la presión atmosférica, h, la altura del agua en el tubo, S, la sección del tubo, ρ, la densidad del líquido. De ahí para la densidad del líquido obtenemos:

$$\rho = \frac{p_A(l_2 - l_1)}{ghl_2}$$

Para disminuir el error se puede utilizar el tubo en U con el codo de goma y el embudo (fig. 207).

162. En el calorímetro con mezcla se echa tanta cantidad de agua para que se derrita toda la nieve, pero la temperatura del agua resultante sea igual a $t_1 = 0\,°C$. Anotemos la ecuación del equilibrio térmico para este caso:

$$m_1\lambda = cm_3(t_2 - t_1),$$

en donde c es el calor específico del agua, λ, el calor específico de fusión del hielo, m_1, la masa de la nieve, m_2 la masa del agua en la nieve, m_3, la masa del agua vertida y t, la temperatura del agua vertida.

De aquí

$$m_1 = \frac{cm_3(t_2 - t_1)}{\lambda}.$$

La relación buscada de porcentaje k de la nieve en el agua se expresa como sigue:

$$k = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,100\,\%.$$

El valor $m_1 + m_2$ puede ser determinado transvasando toda el agua del calorímetro a la probeta graduada y midiendo la masa total del agua m. Tal que $m = m_1 + m_2 + m_3$, $m_1 + m_2 = m - m_3$. Consiguientemente,

$$k = \frac{cm_3 (t_2 - t_1)}{(m - m_3) \lambda} 100\ \%.$$

163. En este problema se exige investigar experimentalmente la dependencia entre el período de oscilaciones del péndulo físico (la regla que ejerce oscilaciones alrededor del eje horizontal) y la distancia l entre el punto de suspensión y el centro de masas de la regla (fig. 208). El análisis de este problema en el aspecto de calidad demuestra que con pequeños y grandes valores de l el período de oscilaciones tiende a la infinidad ($T = \infty$ con $l = 0$ y $l = \infty$). Consiguientemente, la función de T (l) tendrá el mínimo para cierto valor finito de l.

La solución del problema se complica por el hecho de que en la lista del equipo no se ofrece el reloj imprescindible para medir el período de oscilaciones del péndulo. Esta dificultad puede ser salvada con ayuda del segundo péndulo físico que puede utilizarse como patrón de tiempo. Ambos péndulos físicos, el de investigación y el patrón, deben ser puestos en movimiento simultáneamente. Para comparar los períodos de oscilaciones de estos péndulos se calcula el número de oscilaciones n_1 y n_2 que ejecutan los péndulos hasta el momento, cuando sus oscilaciones vuelven a ser cofásicas. Entonces

$$T_1 n_1 = T_{pat} n_2,$$

de donde

$$T_1 = \frac{n_2}{n_1} T_{pat.}$$

Así, el período de oscilaciones del péndulo físico con distintos valores de l será expresado como período de oscilaciones T_{pat} del péndulo patrón.

164. Poner la placa planoparalela sobre el papel y contornearla con el lápiz. Luego trazar en la hoja de papel una recta bajo cierto ángulo al límite divisorio de dos medios (fig. 209). Del otro lado de la placa aplicar la regla de modo que su orientación coincida con la continuación de la línea antes trazada visible a través de la placa. Uniendo los puntos obtenidos O_1 y O_2 obtenemos la trayectoria del rayo refractado en la placa. Trazando una circunferencia de radio arbitrario y bajando los perpendiculares a y b sobre el perpendicular al límite divisorio de dos medios obtenemos para el índice de refracción la siguiente expresión:

$$n = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{b}.$$

La comparación de las longitudes de los segmentos a y b es fácil efectuar-

Fig. 208

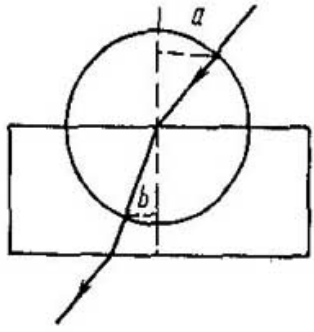


Fig. 209

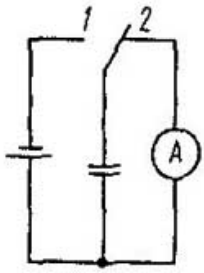


Fig. 210

la con ayuda de una regla sin divisiones y un compás a base de la teorema de Fales que se estudia en el curso de geometría de 7 grado.

165. El método de ejecución de esta tarea se funda en la proporcionalidad de desviación n de la aguja del microamperímetro al valor de la carga q que fluye por el mismo (en el régimen balístico): $n \sim q$. Para convencerse de que tal régimen se cumple hace falta montar el circuito según el esquema ofrecido en la figura 210. Cargando el condensador a partir del manantial de corriente de FEM conocida y conmutando la llave en la posición 2 se registra la desviación n_1 de la aguja del instrumento. Si en lugar de un condensador se toman dos condensadores acoplándolos una vez en serie y otra vez en paralelo, se puede convencerse de que en el primer caso las indicaciones del galvanómetro disminuyen 2 veces, mientras que en el segundo 2 veces aumentan. Se debe a que la cantidad correspondiente de veces ha cambiado la capacidad del condensador y, por consiguiente, la carga que ha pasado el microamperímetro:

$$q = C\mathcal{E}.$$

Sustituyendo al manantial de FEM conocida por el manantial de FEM desconocida registramos la desviación de la aguja del instrumento n_2.

Comparando las expresiones

$$n_1 = \alpha q_1 = \alpha C\mathcal{E} \text{ y } n_2 = \alpha q_2 = \alpha C\mathcal{E}_x$$

obtenemos la expresión para la FEM incógnita:

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}\frac{n_2}{n_1}.$$

La resistencia interna r del manantial de corriente eléctrica es fácil determinarla aplicando la ley de Ohm para el circuito cerrado (fig. 211):

$$\mathcal{E}_x = I(R + r), \quad r = \frac{\mathcal{E}_x}{I} - R.$$

166. En el lápiz en movimiento del lado del plano actúan dos fuerzas: la fuerza de reacción normal del plano $\vec{N}$ y la fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}$ (fig. 212). Ya que el lápiz no se desplaza en el sentido vertical

$$\vec{N} = -m\vec{g}.$$

Para el módulo de la fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}$ se puede anotar:

$$F_{roz} = \mu N = \mu mg.$$

Examinemos el momento "crítico", cuando el lápiz toca el plano en un punto A. Para que el lápiz no de vueltas la resultante de todas las fuerzas debe pasar por el centro de masas del lápiz. Consiguientemente, por el centro de masas debe pasar la resultante $\vec{R}$ de las fuerzas $\vec{N}$ y $\vec{F}_{roz}$. Si el coeficiente de rozamiento es grande y la fuerza $\vec{R}$ pasa por debajo del centro de masas, el lápiz va a dar vueltas.

De este modo, la condición de que el lápiz no da vueltas se anotará así:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{N}{F_{roz}} > \operatorname{tg} 60°,$$

o

$$\frac{mg}{\mu mg} > \sqrt{3}.$$

De aquí

$$\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

167. El cubo puede saltar si el módulo de la fuerza $\vec{F}$, que actúa en el mismo de parte de la bala, resulta mayor que el módulo de la fuerza de gravedad $Mg = 1N$. Hallemos esta fuerza. Para ello examinemos la bala. En la misma de parte del cubo actúa una fuerza igual en módulo, pero opuesta en direccion y la fuerza de gravedad $m\vec{g}$.

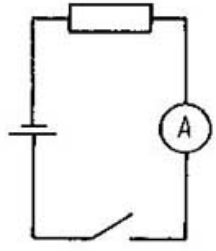


Fig. 211

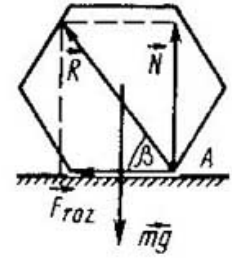


Fig. 212

La velocidad de la bala, al atravesar el cubo, varía de manera insignificante: su variación es igual a 5 m/s, lo que constituye sólo el 5 % de la velocidad de la bala al penetrar en el cubo. Por ello se puede considerar que la fuerza $\vec{F}$ no depende de la velocidad de la bala y es constante.

El impulso de la bala, al pasar por el cubo, cambia a efecto de la acción en la bala de dos fuerzas: la fuerza de gravedad y la fuerza de rozamiento. Si el tiempo, en el cual la bala atraviesa todo el cubo, se designa τ, entonces

$$m(v_1 - v_2) = (F + mg)\tau. \qquad (1)$$

El tiempo τ no es difícil de hallarlo. Ya que las fuerzas que actúan en el cubo son constantes, es constante también la aceleración de la bala y, por consiguiente, la velocidad de la bala cambia linealmente con el tiempo. Por ello la velocidad media de movimiento de la bala en el cubo es igual a

$$v_{med} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Consiguientemente, la bala atraviesa el cubo en el tiempo

$$\tau = \frac{h}{v_{med}} = \frac{2a}{v_1 + v_2} \approx 10^{-3}\ s.$$

Sustituyendo este valor τ en la fórmula (1) hallamos:

$$F = \frac{m(v_1 - v_2) - \mu g}{\tau} \approx 50\ N.$$

Ya que τ es pequeño, el valor de $mg\tau$ es mucho menor que la variación del impulso de la bala y se puede menospreciarlo. La fuerza F resultó mayor que la fuerza de gravedad que actúa en el cubo. Por ello el cubo saltará.

168. El circuito dispuesto en la caja no puede constituir sólo de los resistores. En efecto, examinemos el esquema ofrecido en la figura 213.

Al conectarse un solo manantial el amperímetro debe acusar la intensidad de la corriente eléctrica

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \qquad (1)$$

mietras que al conectarse dos manantiales, la intensidad de corriente

$$2I = \frac{2\mathcal{E}}{2R + r}. \qquad (2)$$

Pero las ecuaciones (1) y (2) son incompatibles. No tienen solución con

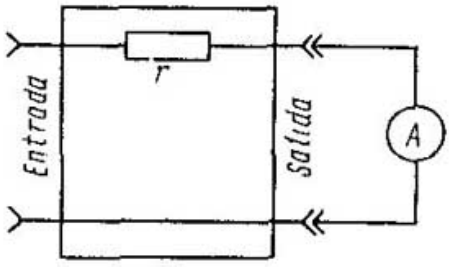


Fig. 213

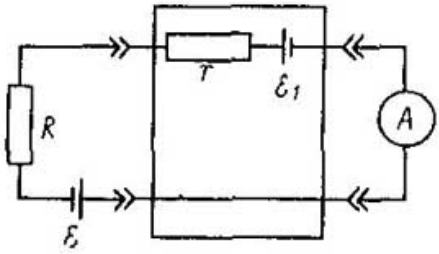


Fig. 214

ninguna r. En efecto, al dividir la ecuación (1) por la ecuación (2) obtendremos:

$$\frac{1}{2} = \frac{r + 2R}{2(R + r)},$$

o

$$R + r = r + 2R,$$

lo cual es imposible.

El circuito situado en la caja debe contener el elemento "activo", o sea el manantial de corriente.

Examinemos el circuito ofrecido en la figura 214 y demostremos que éste satisface la condición del problema.

Al conectarse a la entrada de la caja una pila, por el amperímetro debe fluir la corriente

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_1}{R + r},$$

mientras que al conectarse dos pilas, la corriente

$$I_2 = \frac{2\mathcal{E} + \mathcal{E}_1}{2R + r}.$$

Ya que $I_2 = 2I_1$, entonces

$$\frac{2(\mathcal{E} + \mathcal{E}_1)}{R + r} = \frac{2\mathcal{E} + \mathcal{E}_1}{2R + r}.$$

De aquí

$$\mathcal{E}_1 = -\mathcal{E}\,\frac{2R}{3R + r}.$$

Esta igualdad enlaza entre sí la FEM del manantial $\mathcal{E}_1$ y de la resistencia r. El signo "menos" indica que el manantial contenido en la "caja" se halla conectado al encuentro del manantial externo.

169. La fuerza de elasticidad T que surge durante la extensión del muelle es proporcional al alargamiento del mismo ΔL:

$$T = k \cdot \Delta L,$$

en donde k es la rigidez del muelle.

En condiciones normales, cuando el dinamómetro se encuentra fijo, la fuerza de elasticidad en cualquier sección del muelle es la misma, o sea cualesquiera tramos iguales del muelle al extenderse se alargan a una misma magnitud.

Moviéndose el dinamómetro con una aceleración, la situación no es así.

Examinemos la sección del muelle la que se halla a la distancia x del extremo del mismo fijado al cuerpo del dinamómetro (fig. 215). La fuerza de elasticidad T_x le comunica aceleración al cuerpo del dinamómetro y al tramo del muelle de largo x. La masa de este tramo del muelle es igual a

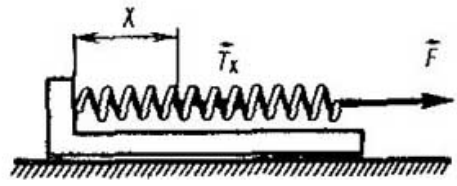


Fig. 215

$$M_x = \frac{M}{L} x,$$

en donde M es la masa y L, la longitud de todo el muelle. Si el dinamómetro se mueve con la aceleración $\vec{a}$, entonces con arreglo a la segunda ley de Newton la fuerza de elasticidad en la sección x puede ser anotada así:

$$T_x = (M + M\frac{x}{L})\, a. \qquad (3)$$

Ya que la aceleración es comunicada al dinamómetro por la fuerza $\vec{F}$, entonces

$$a = \frac{F}{M + M} = \frac{1}{2}\frac{F}{M}. \qquad (4)$$

Por ello

$$T_x = \frac{1}{2} F\,(1 + \frac{x}{L}). \qquad (5)$$

De esta forma, la fuerza T_x varía de una sección a otra a lo largo del muelle.

Para hallar el alargamiento del muelle dividamos mentalmente el muelle no extendido en pequeños tramos iguales de largo Δl. En cada tal tramo la fuerza de elasticidad puede considerarse constante. Sea que tales tramos son n ($n \gg 1$). Ya que con una misma fuerza de elasticidad la deformación de n tramos unidos consecutivamente es n veces mayor que la deformación de un tramo, la rigidez de un tramo es n veces mayor que la rigidez de todo el muelle:

$$k^1 = kn.$$

Contemos los tramos a partir del extremo de muelle fijado al cuerpo del dinamómetro. El alargamiento del tramo i es igual a

$$\Delta l_i = \frac{T_i}{k^1} = \frac{T_i}{kn}.$$

Pero, como se desprende de la fórmula (5),

$$T_i = \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{il}{nl}\right) = \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{i}{n}\right).$$

Por ello

$$\Delta l_i = \frac{1}{2kn} F \left(1 + \frac{i}{n}\right).$$

El alargamiento total del muelle se halla sumando el alargamiento de los tramos del mismo:

$$\Delta l = \Sigma \Delta l_i = \frac{1}{2kn} F \Sigma \left(1 + \frac{i}{n}\right).$$

Tal que $\sum_1^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)$ es la suma de los términos de la progresión aritmética con la diferencia de progresión $\frac{1}{n}$, entonces

$$\Delta l = \frac{F}{4k} \frac{3n + 1}{n}.$$

Pero $n \gg 1$. Por ello

$$\Delta l \approx \frac{3}{4} \frac{F}{k}.$$

Al sustituir esta expresión para ΔL en la fórmula (1) hallemos las indicaciones del dinamómetro:

$$T = k \frac{3F}{4k} = \frac{3}{4} F = 3N.$$

170. Después de que a la bolita superior le comunicaron la velocidad horizontal $\vec{v}$, las bolitas van a dar vueltas en torno del centro de masas del sistema, el cual a su vez va a moverse progresivamente con la velocidad $\vec{v}/2$. Si la bolita inferior se separa inmediatamente de la mesa, en todo el sistema actúa una sola fuerza, la fuerza de gravedad. Ella le comunica al sistema y, por consiguiente, a la bolita inferior, la aceleración $\vec{g}$. Por ello, para que la bolita se separe de la mesa es preciso que la aceleración centrípeda sea mayor que $\vec{g}$.

En el sistema de coordenadas que se mueve con la velocidad del centro de masas, las velocidades de ambas bolitas en módulo son iguales a $v/2$, mientras que la aceleración centrípeda es igual a

$$a_c = \frac{(v/2)^2}{l/2} = \frac{v^2}{2l}$$

La bolita se separará de la mesa si

$$\frac{v^2}{2l} \geqslant g,$$

o sea con

$$l \leqslant \frac{v^2}{2g}.$$

171. Con arreglo a la primera ley de termodinámica la cantidad de calor Q comunicada al gas es igual a la suma de variación de la energía interna de gas ΔU y el trabajo realizado por el mismo A:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (1)$$

Pero en dicho caso el recipiente es termoaislado y $Q = 0$. Consiguientemente,

$$U + A = 0 \qquad (2)$$

Sea que primero la temperatura de gas fue T_1, la presión p_1 y el volumen V_1 y después de que el émbolo fue puesto en libertad y establecido el equilibrio, los parámetros del gas adoptaron los valores de T_2, p_2 y V_2, siendo $V_2 = 2V_1$ (según los datos del problema).

Ya que la energía interna del gas ideal es proporcional a su temperatura, la variación de la energía es proporcional a la variación de la temperatura del gas:

$$\Delta U = c_v \nu (T_2 - T_1), \qquad (3)$$

en donde c_v es la capacidad calorífica molar del gas con un volumen constante y ν, el número de moles del gas.

A continuación, el trabajo realizado por el gas es igual a la variación de la energía potencial del muelle deformado:

$$A = \frac{kx^2}{2}, \tag{4}$$

en donde x es el desplazamiento del émbolo.

Expresemos el valor $\frac{kx^2}{2}$ mediante los parámetros del gas. Ya que tras establecerse el equilibrio el émbolo se halla en reposo, la fuerza de elasticidad del muelle $F = kx$ es igual a la fuerza de presión del gas p_2S:

$$kx = p_2S, \tag{5}$$

en donde S es la superficie del émbolo.

Pero la presión del gas está relacionada con la temperatura por medio de la ecuación del estado gaseoso:

$$p_2V_2 = \nu RT_2. \tag{6}$$

Ya que al expandirse el gas su volumen ha aumentado dos veces y la variación del volumen de gas es igual a Sx, entonces $V_2 = 2Sx$ y, consiguientemente,

$$2p_2Sx = \nu RT_2. \tag{7}$$

Tomando en consideración las relaciones (5) y (7) tenemos:

$$kx = \frac{\nu RT_2}{2x}, \tag{8}$$

o

$$kx^2 = \frac{\nu RT_2}{2}.$$

De tal modo, el trabajo realizado por el gas es igual a

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{\nu RT_2}{4}. \tag{9}$$

Al sistituir esta expresión y la expresión (3) para ΔU en la ecuación (2):

$$c_v \nu (T_2 - T_1) + \frac{1}{4}\nu RT_2 = 0.$$

De aquí

$$T_2 = T_1 \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\frac{R}{c_v}}. \tag{10}$$

Por consiguiente,

$$T_2 < T_1.$$

Ahora podemos hallar cómo variará la presión de gas. Ya que $V_1 = \frac{1}{2} V_2$, entonces según la ecuación del estado gaseoso

$$p_1 \frac{V_2}{2} = \nu R T_1. \qquad (11)$$

Al dividir esta ecuación por la ecuación (6), obtendremos:

$$\frac{p_1}{p_2} = 2\frac{T_1}{T_2} = 2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{R}{c_v}\right),$$

o

$$p_2 = \frac{p_1}{2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{R}{c_v}\right)}.$$

La presión ha disminuido también.

172. El número de las moléculas las cuales en el tiempo τ pasan por el orificio de superficie S, perpendicular al eje x, es igual a

$$Z = \frac{n}{2}|\overline{v}_x|S\tau,$$

en donde n es el número de moléculas en una unidad de volumen, $|\overline{v}_x|$ el valor medio del módulo de proyección de la velocidad de la molécula sobre el eje X.

Con ello el número de moléculas en una unidad de volumen variará en

$$\Delta n = \frac{Z}{V} = \frac{n}{2}\frac{S|\overline{v}_x|\tau}{V}.$$

De aquí

$$\tau = 2\frac{\Delta n}{n}\frac{V}{S|\overline{v}_x|}.$$

Según los datos del problema la temperatura del aire en el satélite permanece invariable. Como se desprende de la ecuación de Clapeyrón – Mendeleyev, en este caso la presión es proporcional a la densidad de gas y, consiguientemente, al número de las moléculas en una unidad de volumen ($p \sim n$). Por ello

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta n}{n} = 0{,}01.$$

Como estimación se puede considerar que

$$3\bar{v}_x^2 = \bar{v}^2,$$

o

$$|\bar{v}_x| = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{v} = \sqrt{\frac{\overline{RT}}{M}}.$$

Por ello

$$\tau = 2\frac{\Delta p}{p}\frac{V}{S}\sqrt{\frac{M}{RT}},$$

en donde M es la masa molar del aire. Sustituyendo en esta expresión los valores numéricos de las magnitudes obtenemos:

$$\tau \approx 70 \text{ s}.$$

En la solución del problema no fueron tomados en consideración los fenómenos relacionados con las colisiones de las moléculas. Por ello la solución ofrecida tiene el carácter de estimación y el resultado es justo sólo en cuanto al orden de la magnitud.

173. Véase la solución del problema 168.

174. Examinemos dos capas delgadas de espesor Δx dispuestas a diferentes lados de la sección SS a iguales distancias de la misma (fig. 216). Estas capas pueden considerarse como armaduras de un condensador plano de cargas contrarias, pero iguales en módulo. La intensidad de campo de estas cargas puede ser calculada por la fórmula

$$E = \frac{Q\,\Delta x}{\varepsilon_0 S},$$

en donde $Q_{\Delta x}$ es la carga de cada armadura y S, su superficie.

En la sección SS la intensidad de campo es igual a la suma de intensidades de campos de todas las parejas similares de capas delgadas:

$$E_{SS} = \Sigma\frac{Q_{\Delta x}}{\varepsilon\,\varepsilon_0 S} = \frac{1}{\varepsilon\,\varepsilon_0 S}\Sigma\, Q_{\Delta x}.$$

Ya que $\Sigma\, Q_{\Delta x}$ es la carga de una capa de plasma de espesor d, entonces

$$\Sigma\, Q_{\Delta x} = \text{ends}.$$

Consiguientemente,

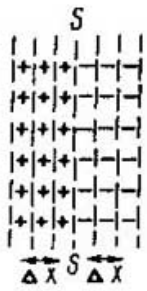


Fig. 216

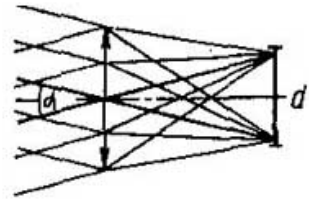


Fig. 217

$$E_{SS} = \frac{ends}{\varepsilon_0 S} = \frac{end}{\varepsilon_0}.$$

Tales separaciones de cargas que alteran la neutralidad del plasma en pequeños volúmenes surgen realmente. Engendran oscilaciones del plasma. Ya que la fuerza que actúa sobre el electrón en el campo surgido es igual a

$$F = eE = \frac{e^2 nd}{\varepsilon_0},$$

entonces

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m_e}}.$$

Esta frecuencia se denomina frecuencia de plasma.

175. Designemos con E_0 la iluminación de la superficie de la lente y con S la superficie de da misma. Entonces el flujo luminoso Fl que hiere la lente se determina por la fórmula

$$Fl = E_0 S.$$

Al caer sobre la imagen de superficie S_1 este flujo luminoso crea la iluminación

$$E = \frac{Fl}{S_1} = E_0 \frac{S}{S_1}.$$

La superficie de la imagen S_1 depende de la distancia focal de la lente. Designemos ron α el ángulo entre los haces de rayos que van de los puntos extremos del Sol (fig. 217). Ya que este ángulo es pequeño ($\alpha \approx 0{,}008$), entonces $d = F\alpha$ y

$$S_1 = \frac{\pi d^2}{4} \approx \frac{\pi F^2 \alpha^2}{4}.$$

Por ello

$$E = E_0 \frac{4S}{\pi F^2 \alpha^2}.$$

Si la lente se corta por el diámetro y se juntan sus lados planos, la superficie de la misma disminuirá dos veces:

$$S' = \frac{S}{2}.$$

La distancia focal disminuirá dos veces también (las potencias ópticas se suman):

$$D = \frac{1}{F'} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F},$$

o

$$F' = \frac{1}{2} F.$$

Por consiguiente, la iluminación de la imagen del Sol será igual a

$$E' = E_0 \frac{2S}{\pi \alpha^2 (\frac{1}{2} F)^2}.$$

Es evidente que

$$\frac{E'}{E} = 2.$$

De este modo, la iluminación de la imagen aumentará dos veces.

176. Véase la solución del problema 171.

177. El valor W es igual al trabajo que hay que invertir para arrancar del átomo un electrón.

Es fácil hallar el trabajo que hay que invertir para arrancar un electrón desde la superficie del átomo "a la infinidad" (infinitamente lejos del mismo). Este trabajo es igual a la energía potencial del electrón a proximidad de la superficie de un globo positivamente cargado. Ya que el potencial del campo eléctrico sobre la superficie del globo es igual a

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

(en donde e es la carga del globo y R, su radio) entonces el trabajo es

$$A_1 = \varphi e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Para hallar el trabajo que hay que realizar para desplazar un electrón desde el centro del átomo a su superficie repartamos mentalmente el globo en delgadas capas de espesor ΔR. En la extensión de cada una

de tales capas se puede considerar constante la fuerza que actúa en la carga. La intensidad del campo creado por las cargas de cada una de las capas en la cavidad limitada por esta capa, como es sabido, es igual a cero, mientras que fuera de la capa la intensidad es la misma, cómo sería si toda la carga de la capa estuviese concentrada en el centro del globo. Esto significa que la intensidad del campo eléctrico en el interior del átomo a la distancia r de su centro se determina por la fórmula

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

mientras que la fuerza que obra en este campo sobre el electrón, por la fórmula

$$F = eE = \frac{qe}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

en donde q es la carga que se encuentra en el interior de la esfera de radio r.

Ya que la carga e está distribuida en el volumen del globo de manera uniforme, en una unidad de volumen se concentra la carga

$$\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Consiguientemente, dentro del globo de radio r se encuentra la carga

$$q = \frac{3}{4}\frac{e}{4\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = e\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Por ello

$$F = \frac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Para calcular el trabajo que se realiza durante el desplazamiento del electrón en el átomo, multipliquemos el valor medio de la fuerza por el desplazamiento R del electrón. Ya que la fuerza que actúa en el electrón es proporcional a la distancia que media del electrón al centro del átomo, el valor medio de la fuerza es igual a la mitad del módulo de la fuerza que actúa en el electrón sobre la superficie del átomo:

$$F_{med} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Por ello

$$A_2 = F_{med} R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2} R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Por consiguiente,

$$W_i = A_1 + A_2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

De ahí

$$R = \frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 W_i}.$$

Al sustituir los valores numéricos de las magnitudes (la energía de ionización del átomo de hidrógeno es $W_i = 13{,}6$ eV, o $21{,}7 \times 10^{-19}$ J; mientras que la carga del núcleo del átomo de hidrógeno es $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) obtenemos para el radio del átomo de hidrógeno en el modelo de Tomson el valor

$$R \approx 1{,}6 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

178. Al acoplarse el condensador, por la varilla comienza a fluir la corriente I, merced a lo cual en la varilla actúa la fuerza

$$F = BlI,$$

dirigida perpendicularmente a la varilla y al vector $\vec{B}$.

Ya que el tiempo t de descarga del condensador es corto se puede considerar que es pequeño el desplazamiento de la varilla desde la posición de equilibrio que se produce en este tiempo. La varilla adquirirá sólo en la posición horizontal cierto impulso $\vec{p}$.

Al repartir el tiempo t en cortos intervalos Δt, en el curso de cada uno de los cuales la fuerza puede considerarse constante, obtendremos:

$$p = \Sigma F_i \Delta t = Bl\Sigma I_i \cdot \Delta t = Blq, \quad v = \frac{p}{m} = \frac{Bl}{m} q,$$

en donde q es la carga pasada por la varilla. Al descargarse completamente el condensador

$$q = CU.$$

Por ello

$$v = \frac{BlCU}{m}.$$

El ángulo de desviación del sistema desde la posición de equilibrio se halla haciendo uso de la ley de conservación de la energía:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl_1 (1 - \cos\alpha) = 2\, mgl_1 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2},$$

de donde

$$\alpha = 2 \text{ arc sen } \left(\frac{BCUl}{2m\sqrt{gl_1}}\right) = 2 \text{ arc sen } (0{,}1) \approx 12°.$$

Ya que

$$\text{sen } \frac{\alpha_0}{2} \approx c_0 \frac{BUl}{2m\sqrt{gl_1}} \quad \text{y}$$

$$\text{sen } \frac{\alpha_1}{2} = c_1 \frac{BUl}{2m\sqrt{gl_1}},$$

entonces

$$C_1 = C_0 \frac{\text{sen } \frac{\alpha_1}{2}}{\text{sen } \frac{\alpha_0}{2}},$$

Tomando en consideración que los ángulos α_0 y α_1 son pequeños, se puede adoptar de manera aproximada que

$$C_1 = C_0 \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \approx 15 \text{ μF}.$$

179. La inducción del campo magnético creado por la primera bobina es proporcional a la intensidad de corriente I en la misma, mientras que la FEM $\mathcal{E}$ inducida en la segunda bobina, a la velocidad de variación del flujo magnético y, por consiguiente, a la velocidad de variación de la intensidad de corriente en la primera bobina:

$$\mathcal{E} \sim \frac{\Delta Fl}{\Delta t} = \frac{S \cdot \Delta B}{\Delta t} \sim \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Ya que la intensidad de corriente I_2 en la segunda bobina es igual a $\frac{\mathcal{E}}{R}$ (en donde R es la resistencia de la bobina), ella va a variar de tal modo como se muestra en la figura 218.

180. Al hacer pasar el hilo por la polea fija, suspender a sus extremos dos cargas de masa igual M (la masa de las cargas puede ser determinada por pesada). Al medir la distancia entre una de las cargas y la superficie de la mesa h, colocar sobre la carga otra carga adicional de masa m. Con ayuda del cronómetro determinar el tiempo t, en el cual la carga con otra carga adicional llegará a la superficie de la mesa.

La aceleración de las cargas se determina por la fórmula

$$a = \frac{mg}{2M + m},$$

de donde, al tomar en consideración que $a = \frac{2h}{t^2}$, obtenemos:

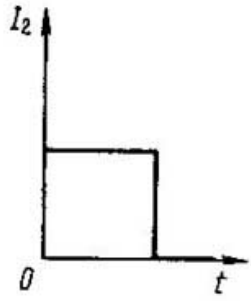


Fig. 218

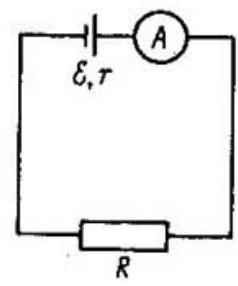


Fig. 219

$$g = \frac{2h\,(2M + m)}{mt^2}$$

Para obtener resultados más precisos es necesario compensar la fuerza de rozamiento.

181. Los ensayos con una serie de discos delgados de cobre de diferente espesor e igual diámetro permiten establecer que el período T de las vibraciones torsionales es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa m del disco:

$$T \sim \sqrt{m}.$$

Tal carácter de la dependencia se confirma por el hecho de que el gráfico de la función T^2 (m) consiste en una recta que pasa por el origen de las coordenadas.

Efectuando ensayos con tres discos (de aluminio, de plástico y de cobre) que tienen una masa igual, pero los radios diferentes se puede demostrar que el período de vibraciones es proporcional al radio del disco:

$$T \sim R.$$

De este modo,

$$T \sim R\sqrt{m}.$$

182. Al suspender al cordón la carga de masa m se mide el alargamiento Δl_1 del cordón. A este alargamiento le corresponde la fuerza de elasticidad mg. Seguidamente se puede doblar el cordón y suspender en el cordón doble la misma carga. El alargamiento en este caso será igual a Δl_2, mientras que la fuerza de elasticidad de cada parte del cordón es $\frac{1}{2}$ mg. Plegando el cordón 3, 4 y 5 veces se puede hallar con cuáles alargamiento la fuerza de elasticidad es igual a $\frac{1}{3}$ mg, $\frac{1}{4}$ mg, $\frac{1}{5}$ mg, etc.

Según estos datos se puede construir el gráfico de dependencia entre la fuerza de elasticidad y el alargamiento del cordón.

183. En un recipiente vacío poner un pedazo de hielo y verter en el mismo de la probeta graduada tanta agua que se derrita todo el hielo.

En este caso la ecuación del equilibrio térmico se anotará de manera simple:

$$cm_1 (t_1 - t_2) m_2\lambda,$$

en donde m_2 es la masa del hielo, m_1 la masa del agua vertida, t_1, la temperatura inicial del agua, t_2, la temperatura final del agua igual a 0 °C, λ, el calor expecífico de fusión del hielo. De la ecuación citada hallamos:

$$\lambda = \frac{cm_1 (t_1 - t_2)}{m_2}.$$

La masa del hielo puede ser determinada vaciando el agua obtenida en la probeta graduada y midiendo la masa total del agua y del hielo:

$$M = m_1 + m_2 = \rho_{agua} V_{tot}.$$

Ya que $m_2 = M - m_1$, entonces

$$\lambda = \frac{cm_1 (t_1 - t_2)}{M - m_1}.$$

184. Ya que, al caer la bola en el medio viscoso (glicerina), la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad de su movimiento, pasado cierto tiempo, o sea en cierto momento, la fuerza de gravedad y la fuerza de Arquímedes:

$$F_r = mg - F_A.$$

A partir de este momento de tiempo la bola va a caer de manera uniforme y su velocidad estacionaria puede ser determinada midiendo la distancia l recorrida en el tiempo t:

$$v = \frac{l}{t}.$$

Arrojando las bolas de diferentes radios y midiendo sus velocidades se puede hallar la dependencia buscada:

$$v \sim r^2.$$

Los radios r de las bolas se miden con el compás de varas.

Es fácil notar el carácter de la dependencia v (r) al construir el gráfico de la función $v = f(r^2)$. El curso rectilíneo de este gráfico confirma la dependencia cuadrática de v (r).

185. La capacidad del condensador puede ser determinada por la expresión

$$C = \frac{q}{\mathcal{E}},$$

en donde q es la carga del condensador, $\mathcal{E}$ la FEM del manantial de corriente. Para determinar la FEM del manantial de corriente montemos el circuito según el esquema ofrecido en la figura 219. Aplicando a este circuito la ley de Ohm obtenemos:

$$\mathcal{E} = I(R + R_m + R_C + r),$$

en donde R es la resistencia del resistor, R_m, R_c, r las resistencias del medidor de corriente (microamperímetro), de los conductores y del manantial de corriente. Ya que R es mucho mayor que las demás resistencias

$$\mathcal{E} \approx IR.$$

El condensador cargado a partir del manantial se conecta para descargar al resistor (fig. 220) y se registran las indicaciones del microamperímetro dentro de iguales lapsos de tiempo o bien se registran los lapsos de tiempo en los cuales se produce la disminución de la intensidad de corriente, cada vez en 10–20 μA. A continuación contruimos el gráfico de dependencia entre la intensidad de corriente de descarga del condensador y el tiempo. La superficie ocupada por el gráfico obtenido es igual a la carga del condensador (fig. 221):

$$q = \int_0^\infty I dt.$$

Cuanto mayores son los valores de la capacidad del condensador y de la resistencia del resistor tanto más duran los procesos de carga y descarga del condensador, tanto más preciso puede ser construido el gráfico de la función de I (t) y, por consiguiente, con mayor precisión puede ser determinada la capacidad C del condensador. Hay que tener en cuenta que un error determinado se debe a la resistencia de la fuga del condensador.

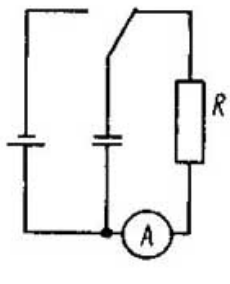


Fig. 220

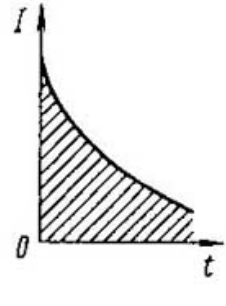


Fig. 221

186. Se monta el circuito según el esquema ofrecido en la figura 222. Reduciendo con ayuda del reóstato la resistencia de la parte externa del circuito se registra una serie de indicaciones del amperímetro y del voltímetro. Con arreglo a estos datos se calculan por la fórmula $P = UI$ los valores correspondientes de la potencia útil P del circuito.

A continuación se construye el gráfico de dependencia $P = P(I)$ y por el gráfico se halla el valor máximo de la potencia.

La existencia del valor máximo de la potencia útil se deduce del análisis de la expresión $P = I(\mathcal{E} - Ir)$. El gráfico de esta función P de I constituye una parábola con cúspide siendo

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2r}.$$

Con esta intensidad de corriente la potencia es igual a

$$P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

Esta condición se logra con

$$R = r.$$

Para determinar la FEM y la resistencia interna del manantial basta con medir la intensidad de corriente en el circuito y la tensión en su parte externa con dos posiciones del cursor de reóstato (fig. 223).

Aplicando a estos dos casos la ley de Ohm para el circuito completo obtenemos:

$$\mathcal{E} = U_1 + I_1 r, \quad \mathcal{E} = U_2 + I_2 r.$$

De aquí

$$r = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}, \quad \mathcal{E} = \frac{I_1 U_2 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}.$$

187. Acoplemos el condensador de papel en el circuito de corriente alterna en serie con el miliamperímetro. En paralelo al condensador acoplemos el voltímetro. Conociendo las indicaciones del amperímetro I,

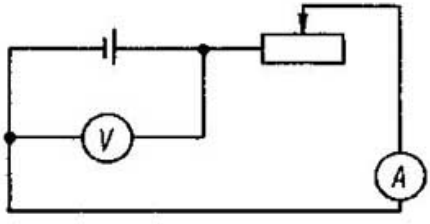


Fig. 222

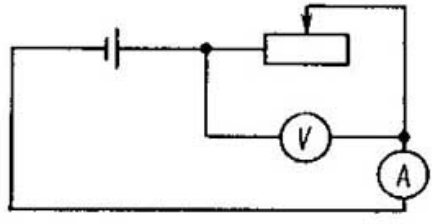


Fig. 223

del voltímetro U y la frecuencia de corriente ν, se puede determinar la capacidad del condensador C:

$$I = \frac{U}{X_C} = 2\pi U \nu C, \quad C = \frac{I}{2\pi \nu U}.$$

Utilizando la fórmula del condensador plano

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

y midiendo con regla el largo l y el ancho b del papel y con el micrómetro el espesor d, se puede determinar la constante dieléctrica ε del dieléctrico:

$$\varepsilon = \frac{Cd}{\varepsilon_0 lb} = \frac{Id}{2\pi \nu U \varepsilon_0 lb}.$$

188. El valor amplitudinal I_m de la intensidad de corriente alterna está enlazado con el valor vigente I de la intensidad de corriente mediante la relación

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$$

la cual se desprende de la ley de Joule:

$$Q = I^2 R\tau = \frac{1}{2} I_m^2 R\tau.$$

De aquí

$$I_m = \sqrt{\frac{2Q}{R\tau}}.$$

Para determinar el valor amplitudinal de la intensidad de corriente alterna que alimenta al calentador de resistencia conocida R, este calentador es sumergido en el calorímetro con agua. Conociendo las masas del agua y del calorímetro m_1 y m_2, sus calores específicos c_1 y c_2, las temperaturas inicial y final del agua y del calorímetro t_1 y t_2 y el tiempo τ de paso de la corriente por los calentadores se puede determinar el valor amplitudinal buscado de la intensidad de corriente alterna, que pasa por la espiral, según la fórmula

$$I_m = \sqrt{\frac{2(c_1 m_1 + c_2 m_2)(t_2 - t_1)}{R\tau}}.$$

189. Véase el problema 181.

190. Si el imán permanente gira alrededor de su eje con la frecuencia ω, el flujo magnético que atraviesa la bobina varía por la ley

$$\Phi = BS \cos \omega t,$$

en donde B es la inducción del campo magnético del imán permanente.

En conformidad con la ley de inducción electromagnética en la bobina se induce la FEM:

$$\mathcal{E} = BS \operatorname{sen} \omega t = \mathcal{E}_m \operatorname{sen} \omega t.$$

De aquí para la inducción B del campo magnético del imán permanente hallamos:

$$B = \frac{\mathcal{E}_m}{S\omega},$$

Para medir la FEM de la inducción la bobina se cierra al galvanómetro, el cual posee una resistencia activa bastante grande R, la que es mucho más grande que las resistencias activa e inductiva de la bobina. Con tal suposición se puede adoptar que

$$\mathcal{E}_m = IR.$$

Por ello

$$B = \frac{IR}{S\omega}.$$

El valor medio de la superficie S de una espira de la bobina (si es de capas múltiples) se halla como sigue:

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{1}{2} \pi (r_1^2 + r_2^2).$$

en donde S_1 es la superficie de la espira exterior y S_2, la superficie de la espira interior.

El gráfico de dependencia de la FEM y de la intensidad de corriente en función del tiempo son sinusoidas. Pero las oscilaciones de la intensidad de corriente se retrasan en fase de las oscilaciones de la FEM debido a la inductancia de la bobina y del galvanómetro.

191. La orientación del polo norte de la aguja imantada coincide con la orientación del vector de la inducción magnética. Si se sitúa la aguja imantada de tal modo que sea perpendicular al conductor (fig. 224), al pasar por el conductor la corriente eléctrica, la aguja se desviará de la orientación del meridiano magnético acercándose a la tangente de la circunferencia circunscrita en torno al conductor con corriente. El ángulo α_1 de desviación de la aguja fuera del meridiano magnético puede ser determinado por la fórmula

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{B_0},$$

en donde B es la inducción del campo magnético de la corriente, B_0 la componente horizontal de la inducción del campo magnético de la Tierra. Con el aumento de la intensidad de corriente I en el conductor aumenta también el ángulo de desviación de la aguja. Midiendo los valores de tg α para diferentes valores de la intensidad de la corriente I se puede demostrar que la inducción del campo magnético B de la corriente eléctrica en el conductor recto es directamente proporcional a la intensidad de la corriente:

$$B \sim I.$$

De una forma similar se puede examinar la dependencia entre la inducción del campo magnético de la corriente rectilínea y la distancia hasta la corriente. Para ello hace falta, sin variar la intensidad de corriente, determinar tg α a diferentes distancias de la aguja imantada hasta el conductor. Tales mediciones permiten establecer que la inducción magnética B es inversamente proporcional a la distancia R:

$$B \sim R^{-1}.$$

192. Al resbalar los cubos de masa m del canalón los mismos adquieren la velocidad $\vec{v}$. Después de la colisión inelástica con el péndulo balístico de masa M la velocidad del péndulo con el cubo será igual a $\vec{u}$. La relación entre $\vec{v}$ y $\vec{u}$ puede ser determinada valiéndose de la ley de conservación del impulso:

$$m\vec{v} = (m + M)\vec{u},$$

de donde

$$\vec{v} = \frac{m + M}{m}\vec{u}.$$

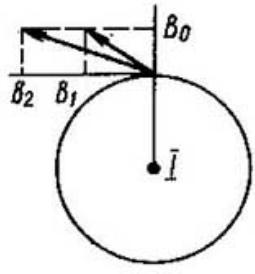


Fig. 224

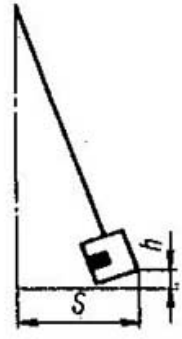


Fig. 225

Pero

$$u = \sqrt{2gh},$$

en donde h es la altura a la cual se elevará el centro de masas del péndulo. Como se ve en la figura 225,

$$h = \frac{s^2}{2l},$$

en donde l es la longitud del hilo de suspensión del péndulo, s la desviación lineal del péndulo que se fija mediante un tope. Por ello

$$U = s\sqrt{\frac{g}{l}}$$

y

$$v = \frac{m+M}{m} s\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Por consiguiente, la variación de la energía cinética del cubo después de la colisión con el péndulo balístico se expresa como sigue:

$$\Delta K = \frac{m}{2}(v^2 - u^2) = \frac{1}{2} s^2 \frac{g}{l} \left[\left(\frac{m+M}{m}\right)^2 - 1\right].$$

Para el valor relativo de esta variación obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta K}{K} = 1 - \left[1 + \left(\frac{M}{m}\right)^2\right]^{-1}.$$

193. De acuerdo con la segunda ley de Newton la variación del impulso del buque en poco tiempo τ es igual al impulso de la fuerza $\vec{F}$ que actúa en el buque:

$$m \cdot \Delta\vec{v} = \vec{F}\tau.$$

Ya que la fuerza $\vec{F}$ es variable, el cambio del impulso del buque en un lapso de tiempo grande t es igual al impulso de fuerza media $\vec{F}_{med}$:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F}_{med} t.$$

El valor medio de la fuerza es proporcional a la velocidad media del buque:

$$F_{med} = -kv_{med}.$$

Por ello

$$mv - mv_0 = -kv_{med} t.$$

Pero el producto $v_{med}t$ es igual al desplazamiento s del buque. Por consiguiente,

$$m(v - v_0) = ks,$$

de donde

$$s = \frac{m}{k}(v_0 - v).$$

Ahora es fácil hallar el desplazamiento del buque en el tiempo, durante el cual la velocidad del buque disminuyó dos veces ($v = \frac{1}{2} v_0$),

$$s_1 = \frac{m}{2k} v_0 = 5 \text{ m}$$

y su desplazamiento hasta la parada completa ($v = 0$)

$$s_2 = \frac{m}{k} v_0 = 10 \text{ m}.$$

194. Véase la solución del problema 203.
Es evidente que a la caja se aplica la menor fuerza, cuando la caja se mueve de manera uniforme.

195. Ya que a la tabla la velocidad se comunica mediante un empujón, en el momento inicial la barra se halla en reposo respecto al plano, mientras que la tabla adquiere la velocidad $\vec{v}_0$. En el sentido horizontal sobre la barra y la tabla actúan sólo las fuerzas de rozamiento de deslizamiento (fig. 226) iguales en módulo a μmg. Estas fuerzas comunican a la barra y la tabla las aceleraciones

$$a_b = \frac{\mu mg}{m} = \mu g$$

y

$$a_t = -\frac{\mu mg}{M} = -\mu \frac{m}{M} g.$$

De este modo, la velocidad de la barra con el tiempo irá en aumento,

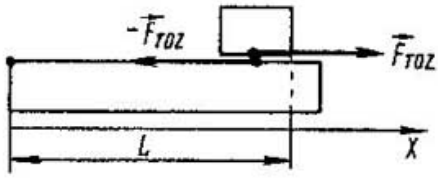


Fig. 226

mientras que la de la tabla va a disminuir. En el sistema de lectura relacionado con la tabla la aceleración de la barra se determina así:

$$a_{rel} = a_b - a_t = \mu g \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

La velocidad inicial de la barra está dirigida a la izquierda y es igual en módulo a v_0. La barra no abandonará la tabla deslizando si su velocidad en la extremidad izquierda de la tabla, al pasar respecto a la misma la distancia L, llegará a ser igual a cero. Por ello

$$v_0^2 = 2 a_{rel} L = 2\mu g L \left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

o

$$v_0 = \sqrt{2\mu g L \left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

La barra abandonará deslizando la tabla, o sea la tabla escurrirá de debajo de la barra si $v > v_0$.

196. Ya que la tensión en la lámpara en ambos casos es igual, es igual en ambos casos también la tensión en la parte superior (según el esquema) del reóstato. Por consiguiente, en la misma se desprende una potencia igual en los dos casos. Pero en el segundo la corriente fluye también por la parte inferior del reóstato, en la cual asimismo se desprende la energía. Consiguientemente, en el primer caso las pérdidas de energía son menores, mientras que el rendimiento es superior que en el segundo.

197. Ya que la arandela se halla sobre la superficie áspera, es evidente que en el plano horizontal en la arandela actúa sólo la fuerza de rozamiento la que se suma de las fuerzas de rozamiento que actúan en diferentes sectores de la superficie de la arandela. Ya que las direcciones de las velocidades de diferentes sectores son distintas, son distintas también las fuerzas de rozamiento que actúan en estos sectores. Repartamos la arandela en sectores elementales y destaquemos dos iguales sectores de la arandela 1 y 2, dispuestos simétricamente respecto al diámetro de la arandela perpendicular a la dirección de la velocidad $\vec{v}_0$ (fig. 227). En estos sectores actúan las fuerzas de rozamiento iguales en módulo

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \mu m g,$$

en donde m es la masa del sector de la arandela y μ el coeficiente de rozamiento. Pero las direcciones de las fuerzas de rozamiento $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son distintas. Hallemos estas direcciones.

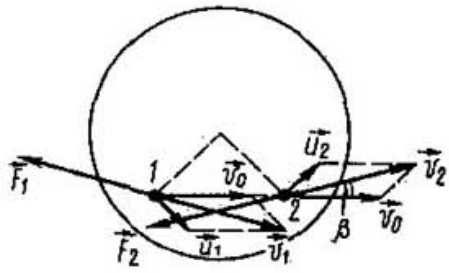


Fig. 227

La velocidad de cada uno de los sectores es igual a la suma de la velocidad del movimiento de avance del centro de la arandela $\vec{v}_0$ y de la velocidad lineal $\vec{u}$ de rotación de este sector respecto al centro de la arandela. La velocidad $\vec{u}$ es perpendicular al radio R trazado a dicho sector desde el centro de la arandela. Ya que $R_1 = R_2$, entonces $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \omega R$, o sea las velocidades son iguales en módulo. Además, son iguales también los ángulos, los cuales constituyen las velocidades $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ con la dirección del vector $\vec{v}_0$. Esto significa que las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de los sectores 1 y 2 también son iguales en módulo y forman con la dirección del vector $\vec{v}_0$ iguales ángulos β, pero se hallan desviadas de la dirección del vector de la $\vec{v}_0$ en sentidos opuestos. Las fuerzas de rozamiento $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ están orientadas en el sentido opuesto a los vectores de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, respectivamente. Sus componentes verticales, por lo visto, son iguales entre sí en módulo, pero están dirigidas en sentidos opuestos. Por ello su suma es igual a cero. Por consiguiente, la fuerza sumaria de rozamiento que actúa en los sectores elementales simétricos destacados de la arandela es igual a la suma de las componentes horizontales de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ y está dirigida en el sentido opuesto al vector de $\vec{v}_0$.

Examinando también otros pares similares de elementos llegaremos a la conclusión de que la fuerza resultante de rozamiento, que actúa en toda la arandela, también está dirigida en el sentido opuesto a la velocidad $\vec{v}_0$. Esta fuerza puede variar el módulo de la velocidad del centro de la arandela, pero no puede variar la dirección de esta velocidad (la aceleración conferida a la arandela por la fuerza de rozamiento está dirigida en el sentido opuesto a la velocidad del centro de la arandela). Por consiguiente, la trayectoria de movimiento de la arandela será una línea recta.

Si en el momento inicial la velocidad angular de rotación de la arandela es *igual* a cero ($\omega_0 = 0$), entonces las fuerzas de rozamiento que actúan en todos los sectores elementales de la arandela están dirigidas en el mismo sentido, o sea en el sentido contrario a la velocidad v_0. Por ello, la fuerza resultante de rozamiento, equivalente a su suma, en módulo es mayor que en el caso anterior; mayor será también el módulo de la aceleración.

Por consiguiente, con $\omega_0 = 0$ el camino que recorre la arandela antes de detenerse es menor que con $\omega_0 \neq 0$.

198. En la carga actúan dos fuerzas: la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ y la fuerza $\vec{Q}$ de reacción de la rueda. Ya que la rueda se mueve de manera uniforme, la resultante $\vec{P}$ de estas fuerzas está dirigida hacia el centro de la rueda (fig. 228) y comunica a la carga la aceleración centrípeda $\vec{a}$. Esta aceleración es igual en todos los sistemas inerciales de lectura. En el sistema de coordenadas relacionado con el centro de la rueda y el que se mueve horizontalmente con la velocidad $\vec{v}$, la carga se mueve por la circunferencia con la velocidad lineal $\vec{v}$ y su aceleración centrípeda es igual a

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

Ahora examinemos la rueda. En la misma actúa la fuerza de gravedad $M\vec{g}$, la fuerza $\vec{Q}$ de parte de la carga y la fuerza $\vec{N}$ de reacción de la tierra. Cuando la proyección de la fuerza $\vec{Q}$ sobre la dirección vertical llega a ser igual a Mg, la rueda salta.

Con arreglo a la segunda ley de Newton la suma de proyecciones sobre el eje "y" de todas las fuerzas, que actúan en la carga, debe ser igual a ma_y, o sea $\frac{mv^2}{R}\cos\alpha$:

$$|Q_y| + mg = \frac{mv^2}{R}\cos\alpha.$$

De aquí

$$|Q_y| = \frac{mv^2}{R}\cos\alpha - mg.$$

Con dicho valor de la velocidad de movimiento v la magnitud $|Q_y|$ es máxima con $\alpha = 0$, o sea cuando la carga se halla en el punto superior. Justamente en este momento saltará la rueda con la velocidad mínima

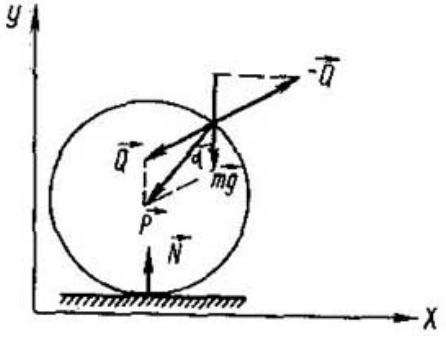


Fig. 228

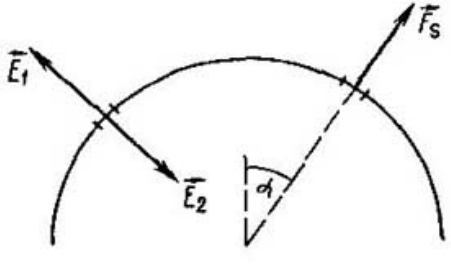


Fig. 229

de movimiento. Por consiguiente, la condición del "salto" de la rueda se puede anotarla como sigue:

$$Mg = \frac{mv^2_{mín}}{R} - mg.$$

De aquí

$$v_{mín} = \sqrt{gR\left(1 + \frac{M}{m}\right)} \approx 5 \text{ m/s}.$$

199. Ya que la bola es metálica, la carga Q se distribuirá de manera uniforme por su superficie. Por eso se puede hablar sobre la esfera cargada. Para determinar la fuerza que actúa, por ejemplo, en la parte superior de la esfera de parte de la inferior repartamos mentalmente esta parte de la esfera en sectores elementales. La fuerza $\vec{F}$ que actúa en uno de tales sectores (fig. 229) se determina por la fórmula

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

en donde q es la carga del sector destacado, $\vec{E}$, la intensidad del campo creado por toda la demás parte de la esfera. Es notorio que

$$q = \frac{QS}{4\pi R^2},$$

en donde S es la superficie del sector destacado.

Como es sabido, la intensidad del campo fuera de la esfera cargada a proximidad de su superficie se determina por la fórmula

$$E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{R^2},$$

mientras que la intensidad del campo dentro de tal esfera es igual a cero.

En consonancia con el principio de superposición la intensidad del campo, tanto dentro como fuera de la esfera, se suma de la intensidad del campo del sector destacado de la esfera cargada y de la intensidad del campo de la demás parte de la esfera. Consideremos que el sector destacado es tan pequeño que se puede tomarlo por plano. Entonces las intensidades del campo de este sector, tanto dentro como fuera de la esfera, son iguales en módulo y se hallan orientadas perpendicularmente al área en sentidos opuestos, o sea

$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_2.$$

Sea, con el objetivo de la certidumbre, que la carga de la esfera es positiva. Entonces los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ están dirigidos como se ilustra en la figura 229.

Ya que la intensidad del campo dentro de la esfera es igual a cero, entonces la suma del vector de $\vec{E}_2$ y del vector de $\vec{E}$ de la intensidad del campo de la demás parte de la esfera es igual a cero.

Por consiguiente,

$$\vec{E}_2 + \vec{E} = 0,$$

ó

$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 = \vec{E}.$$

Entonces para la intensidad del campo fuera de la esfera se puede anotar:

$$\vec{E}_e = \vec{E} + \vec{E}_1,$$

de donde

$$E = \frac{1}{2} E_e = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{Q}{R^2}.$$

Consiguientemente, para el módulo de la fuerza $\vec{F}_s$ que actúa en el sector destacado de la esfera, se puede anotar:

$$F_s = E_q = \frac{Q^2 S}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4}.$$

Ahora hallemos la fuerza $\vec{F}$ que actúa en toda la parte superior de la esfera. Para ello hace falta hallar la suma de las fuerzas $\vec{F}_s$ que actúan en los sectores elementales de la "cima" de la esfera, o sea de la superficie del segmento esférico. De las razones de simetría se desprende que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas $\vec{F}_s$ es igual a cero. Por ello

$$F = \Sigma F_{s\,vert} = \Sigma F_s \cos\alpha = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4} \Sigma S \cos\alpha,$$

en donde α es el ángulo entre el vector de $\vec{F}_s$ y la vertical. Ya que $S\cos\alpha$ es la proyección de la superficie del sector sobre el plano horizontal, la suma $\Sigma S\cos\alpha$ es igual a la superficie S de la base del segmento esférico:

$$S = \pi r^2,$$

en donde r es el radio de la base del segmento esférico. Por consiguiente,

$$F = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4} \pi r^2 = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2} \left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right).$$

200. Una vez cerrada la llave, en el circuito surge la corriente eléctrica, pero la intensidad de corriente poco a poco disminuye. Como se desprende de la característica de voltios-amperios del diodo, la tensión en el diodo es igual a U_0 con todos los valores de la intensidad de corriente hasta el mismo cero. Por ello el proceso de la carga del conden-

sador y el flujo de la corriente en el circuito cesarán en el momento, cuando la tensión U_C en el condensador será igual a

$$U_C = \mathcal{E} - U_0.$$

Para este momento por el circuito pasará la carga

$$q = CU_C = C(\mathcal{E} - U_0).$$

Con arreglo a la ley de conservación de la energía el trabajo del manantial de corriente para trasladar la carga por todo el circuito será igual a la suma de los trabajos en los sectores por separado:

$$A = A_q + A_R + W_C,$$

en donde $A = \mathcal{E}q$ es el trabajo del manantial de corriente, $A_q = U_0 q$ el trabajo en el sector del circuito que comprende el diodo, $W_C = \frac{1}{2} qU_C = \frac{1}{2} q \times (\mathcal{E} - U_0)$ es la energía del condensador cargado, A_R el trabajo de trasladar la carga por el resistor R a costa del cual este resistor transmite al medio ambiente la cantidad de calor Q.

Por ello

$$Q = \mathcal{E}q - U_0 q - \frac{1}{2} q(\mathcal{E} - U_0) = \frac{1}{2} C(\mathcal{E} - U_0)^2.$$

201. Para la ebullición del líquido homogéneo es necesario que la presión del vapor saturado en las burbujas que se forman en todo el volumen del líquido sea igual a la presión atmosférica exterior[1].

En el caso de la ebullición "limítrofe" en las burbujas que se encuentran en el límite entre el agua y el tetracloruro de carbono (CCl_4) se contiene tanto el vapor de agua como el tetracloruro de carbono gaseoso, siendo la suma de sus presiones parciales igual a la presión atmosférica:

$$p_{atm} = p_1 + p_2,$$

en donde $p_1 = 192$ mm Hg es la presión parcial del vapor de agua saturado, p_2, la presión parcial del tetracloruro de carbono gaseoso saturado. Dado que $p_{atm} = 760$ mm Hg, $p_2 = p_{atm} - p_1 = 568$ mm Hg.

Durante la ebullición las burbujas se elevan hacia arriba, llegan hasta la superficie del líquido y revientan. Por consiguiente, la relación

---

[1] En realidad la presión del vapor saturado debe ser mayor que la presión atmosférica en la magnitud

$$\Delta p = \rho gh + \frac{2\sigma}{R},$$

en donde ρgh es la presión hidrostática a la profundidad h, $\frac{2\sigma}{R}$, la presión adicional debajo de la superficie curvada del líquido (σ es el coeficiente de la tensión superficial, R, el radio de la burbuja). Por lo general de esta magnitud se puede prescindir en comparación con la presión atmosférica.

entre las masas m_1 y m_2 de los vapores formados en cierto tiempo es igual a la relación entre la densidad ρ_1 del vapor de agua y la densidad ρ_2 del tetracloruro de carbono gaseoso en la burbuja.

De la ecuación de Mendeleyev - Clapeyron la densidad del vapor saturado se expresa como sigue:

$$\rho_s = \frac{p_s M}{RT},$$

en donde p_s es la presión del vapor saturado, M, la masa molar del vapor, T, la temperatura y R, la constante de los gases. Por ello

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1 M_1}{p_2 M_2} \approx \frac{1}{25}.$$

De aquí se desprende que el tetracloruro de carbono con la ebullición "limítrofe" se evapora 25 veces más rápido que el agua.

202. Después de la colisión de las bolas 1 y 2 la bola 1 va a moverse progresivamente con cierta velocidad constante. El centro de masas del sistema de las bolas 2 y 3 también va a moverse progresivamente con una velocidad constante y, además, las bolas 2 y 3 van a oscilar respecto al centro de masas de las mismas. Para responder a la cuestión si tropezarán o no las bolas 1 y 2 por segunda vez, hay que hallar la dependencia entre las coordenadas de estas bolas y el tiempo y ver si pueden estas coordenadas coincidir.

Consideremos que esta colisión es instantánea. En este caso la misma se produce como la colisión de dos bolas libres no enlazadas con otros cuerpos. Por eso se puede aplicar las leyes de conservación del impulso y de la energía[1]. Designando la velocidad de la bola 1 antes de la colisión con $\vec{v}_0$, su velocidad después de la colisión con $\vec{v}_1$ y la velocidad de la bola 2 después de la colisión con $\vec{v}_2$ se puede anotar:

$$Mv_0 = Mv_1 + mv_2, \quad \frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Solucionando en conjunto estas ecuaciones respecto a v_1 y v_2 hallamos:

$$v_1 = v_0 \frac{M - m}{M + m} = v_0 \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma},$$

$$v_2 = v_0 \frac{2}{1 + \gamma}.$$

Después de la colisión la bola 1 va a moverse de manera uniforme y sus coordenadas van a variar con el tiempo según la ley

---

[1] El tiempo de la colisión τ debe ser tal que se pueda no tomar en consideración el desplazamiento de la bola 2 y la deformación del muelle. Para ello ha de cumplirse la desigualdad $\tau \ll T$ (en donde T es el período de oscilaciones de la bola 2 respecto al centro de masas de las bolas 2 y 3).

$$x_1 = v_1 t = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} t.$$

El centro de masas de las bolas 2 y 3 va a moverse también de manera uniforme, pero con la velocidad

$$v_c = \frac{v_2}{2} = v_0 \frac{1}{1+\gamma}$$

(las bolas 2 y 3 son iguales). Esto significa que la coordenada del centro de masas varía con el tiempo por la fórmula

$$x_c = v_0 \frac{1}{1+\gamma} t.$$

Examinemos el movimiento de las bolas 2 y 3 en el sistema de coordenadas enlazado con su centro de masas. En este sistema en el momento inicial las bolas se mueven una al encuentro de otra con velocidades iguales en módulo. Por ello a continuación cada una de las bolas va a ejecutar oscilaciones armónicas respecto al centro de masas según la ley

$$x = A \operatorname{sen} \omega t.$$

Si la rigidez de la mitad del muelle se designa con k, la frecuencia de estas oscilaciones será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La amplitud de oscilaciones A puede ser hallada valiéndose de la ley de conservación de la energía. En el momento inicial el muelle no se halla deformado, la bola 2 posee la velocidad $v_2/2$ y la energía

$$\frac{mv_0^2}{2(1+\gamma)^2}.$$

Igualemos esta energía a la energía de la deformación elástica del muelle en el momento, cuando la desviación de la bola de la posición de equilibrio es máxima e igual a la amplitud A de oscilaciones:

$$\frac{mv_0^2}{2(1+\gamma)^2} = \frac{kA^2}{2}.$$

De aquí

$$A = \sqrt{\frac{mv_0^2}{(1+\gamma)^2 k}} = \frac{v_0}{(1+\gamma)\omega}.$$

Ahora se puede anotar la dependencia entre la coordenada de la bola 2 y el tiempo en el sistema de coordenadas enlazado con el plano horizontal:

$$x_2 = v_c t + A \operatorname{sen} \omega t = v_0 t \frac{1}{1+\gamma} \quad t + \frac{v_0}{(1+\gamma)\omega} \operatorname{sen} \omega t.$$

Las bolas 1 y 2 chocarán una vez más si es posible la ecuación

$$x_1 = x_2,$$

o sea

$$v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} = v_0 t \frac{1}{1+\gamma} (1 + \frac{1}{\omega t} \operatorname{sen} \omega t),$$

ó

$$\operatorname{sen} \omega t = -\gamma \omega t.$$

La solución de esta ecuación se determina por los puntos de intersección de la recta $y = \gamma\varphi$ con la sinusoide $y = \operatorname{sen} \varphi$ (fig. 230); con ello la solución existe si $\gamma \leqslant \gamma_1 \approx \operatorname{tg} \gamma_1$. En la figura se ve que

$$\gamma_1 \approx (\frac{3}{2}\pi)^{-1} \approx 0{,}21.$$

La relación de las masas de bolas es igual aproximadamente a 0,21.

203. En el cajón (fig. 231) actúa la fuerza de gravedad $m\vec{g}$, la fuerza de tensión de la cuerda $\vec{F}$, la fuerza de reacción de la plancha N y la fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}$ cuyo módulo es $F_{roz} = \mu N$. Proyectemos todas

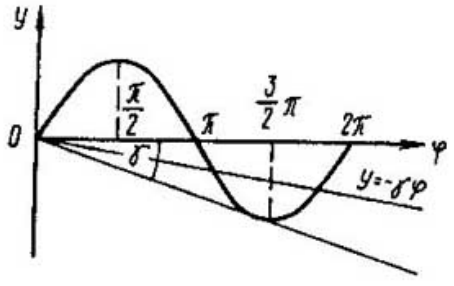


Fig. 230

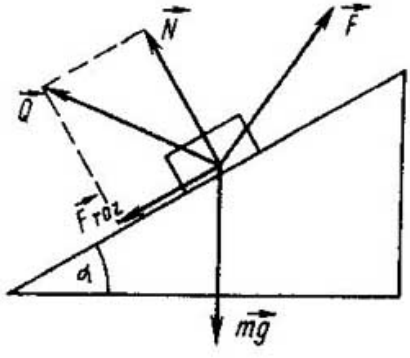


Fig. 231

las fuerzas sobre las direcciones a lo largo de la plancha y perpendicularmente a la misma y anotemos las ecuaciones correspondientes de movimiento.

Reemplacemos las fuerzas $\vec{N}$ y $\vec{F}_{roz}$ con su resultante fuerza completa de reacción de la plancha: $\vec{Q} = \vec{N} + \vec{F}_{roz}$ (ver la fig. 231). En el caso del movimiento uniforme la suma de las fuerzas $\vec{Q}$, $\vec{F}$ y $m\vec{g}$ debe ser igual a cero y los vectores de estas fuerzas deben formar un triángulo cerrado.

Notemos que la dirección de la fuerza $\vec{Q}$ forma con el perpendicular al plano inclinado el ángulo δ, el cual se determina por la relación

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{F_{roz}}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu.$$

De aquí se deduce que al variar el módulo y la dirección de la fuerza $\vec{F}$, la dirección de la fuerza $\vec{Q}$ permanece invariable. Ya que el módulo y la dirección del vector $m\vec{g}$ no cambian, el módulo del vector de $\vec{F}$ será el mínimo si este vector resulta perpendicular al vector de $\vec{Q}$ (fig. 232, a). En este caso la fuerza $\vec{F}$ va a formar el ángulo

$$\beta = \alpha + \beta = \alpha + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\mu$$

(los ángulos β y $\alpha + \delta$ son iguales como los ángulos de lados recíprocamente perpendiculares).

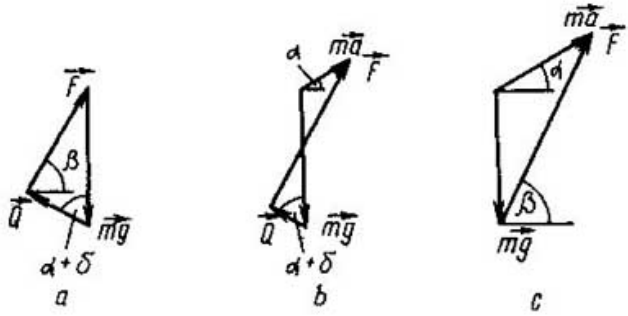


Fig. 232

De la misma manera se soluciona el problema para el caso del movimiento del cajón con la aceleración $a < a_0$. En este caso la suma de los vectores de $m\vec{g}$, $\vec{Q}$ y $\vec{F}$ debe ser igual a $m\vec{a}$ (fig. 232, b). Con ello el módulo de la fuerza $\vec{F}$ va a cambiar, pero su dirección seguirá siendo la misma.

Con $a > a_0$, cuando las fuerzas $\vec{N}$, $\vec{F}_{roz}$ y, por consiguiente, $\vec{Q}$ son iguales a cero, la fuerza $\vec{F}$ debe unir los extremos de los vectores $m\vec{g}$ y $m\vec{a}$ (fig. 232, c). Es fácil notar que en este caso

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{g + a\,\operatorname{sen}\alpha}{a\cos\alpha}\right) = \alpha + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{g\cos\alpha}{g\,\operatorname{sen}\alpha + a}\right).$$

204. Después de que el devanado resulte cortocircuitado el motor se convierte en una dinamo; con ello la corriente I en el inducido de la dinamo será la misma que fue, cuando la máquina funcionó como motor eléctrico. En efecto, en ambos casos una misma carga se mueve (sube o baja) de manera uniforme. Por ello, el momento de las fuerzas, que actúan en el inducido de parte del campo magnético del inductor y son proporcionales a la intensidad de corriente, es igual al momento de la fuerza de gravedad que actúa en la carga.

Durante la elevación del hilo imponderable (en el régimen de la marcha en vacío) el momento de la carga es igual a cero. En este caso es igual a cero también la intensidad de corriente I_0 en el inducido. Anotemos la ley de Ohm para todos los tres casos.

Si la carga se sube con ayuda del motor, la ley de Ohm se anotará como sigue:

$$U = \mathcal{E}_1 = IR, \qquad (1)$$

en donde U es la tensión en los bornes del motor y $\mathcal{E}$ la FEM que se induce en el inducido.

Al bajar la carga, cuando el motor funciona como una dinamo, la ley de Ohm adopta el siguiente aspecto

$$\mathcal{E} = IR. \qquad (2)$$

Pero cuando el motor marcha en vacío, la intensidad de corriente es igual a cero y la tensión en los bornes es igual a la FEM que se induce en el inducido:

$$U - \mathcal{E}_1' = 0. \qquad (3)$$

Ya que la FEM de inducción es proporcional a la velocidad de variación del flujo magnético, o sea a la velocidad angular ω de rotación del inducido, y $\omega \sim v$, entonces

$$\mathcal{E}_1 = kv_1, \quad \mathcal{E} = kv_2 \text{ y } \mathcal{E}_1' = kv_0, \qquad (4)$$

en donde k es el coeficiente de proporcionalidad. De las igualdades (1) – (4) obtenemos:

$$v_2 = v_0 - v_1.$$

205. El núcleo con bobinas constituye un transformador elevador. Designemos con K la relación de los números de espiras en los devanado-

$$K = \frac{n_2}{n_1} = 2. \qquad (1)$$

La tensión U_2 en la bobina secundaria abierta es igual a la FEM $\mathcal{E}_2$, la que se induce en la misma. El valor de $\mathcal{E}_2$ está enlazado con la FEM $\mathcal{E}_1$ que surge en la bobina primaria mediante la relación

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (2)$$

En la figura 233 se ofrece el esquema de este transformador, en el cual la resistencia activa R del circuito primario se muestra acoplado en serie con la resistencia reactiva X_L. Por el circuito primario del trans-

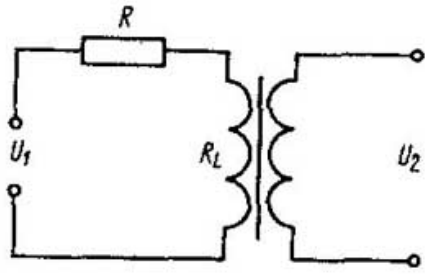


Fig. 233

formador fluye la corriente alterna, el valor efectivo de la cual se determina por la fórmula (la ley de Ohm para la corriente alterna)

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}. \qquad (3)$$

Con el arrollamiento secundario abierto la FEM de inducción en el devanado primario $\mathcal{E}_1$ es igual a la tensión en la resistencia inductiva:

$$\mathcal{E}_1 = IX_L = U_1 \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}. \qquad (4)$$

Entonces de (1) – (4) obtenemos:

$$U_2 = \frac{KU_1}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{X_L}\right) + 1}}. \qquad (5)$$

Una relación similar puede ser anotada también para el transformador con núcleo cuya permeabilidad magnética es μ. Ya que $X_L = \omega L$ y $L \sim \mu$, entonces al cambiar el núcleo variará la resistencia inductiva del arrollamiento primario:

$$\frac{X_L'}{X_L} = \frac{\mu'}{\mu}.$$

De este modo,

$$U_2' = \frac{KU_1}{\sqrt{\left(\frac{R}{X_L}\right)^2 + 1}} = \frac{KU_1}{\sqrt{\left(\frac{R}{X_L}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^2 + 1}}.$$

Pero de la igualdad (5)

$$\left(\frac{R}{X_L}\right)^2 = \left(K\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1.$$

Por ello

$$U_2' = \frac{KU_1}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^2 \left[\left(K\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1\right] + 1}},$$

$u_2' \approx 20$ V.

206. Ejecutando una serie de disparos en el sentido horizontal se halla la distancia media S_{med} de vuelo del proyectil y se calcula la velocidad media de salida del proyectil:

$$V_{0,\,med} = \frac{S_{med}}{t} = \frac{S_{med}}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

en donde h es la altura de elevación de la pistola sobre el piso, t el tiempo de vuelo del proyectil. A continuación se determina la desviación máxima de la velocidad de salida del proyectil de la velocidad media.

Se puede efectuar unas cuantas series de disparos con diferentes ángulos α de salida del proyectil y hallar la dependencia $S_{med}(\alpha)$. Para este fin es cómodo colocar el cajón con arena al mismo nivel que la pistola. Ya que en el caso del disparo bajo el ángulo α (fig. 234)

$$y = v_0 t \operatorname{sen}\alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad x = v_0 t \cos\alpha,$$

entonces $y = 0$ con $t = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$.

Por ello

$$s = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha.$$

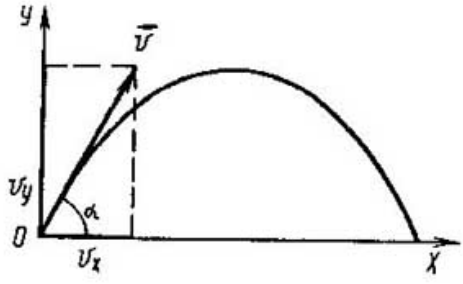


Fig. 234

De aquí

$$v_0 = \sqrt{\frac{sg}{\operatorname{sen} 2\alpha}},$$

y se puede considerar que

$$v_{0,\,med} = \sqrt{\frac{S_{med}\, g}{\operatorname{sen} 2\alpha}}.$$

Una vez colocado, por un miembro del jurado, el blanco, se mide la altura h de éste (fig. 235) y el ángulo α, bajo el cual hay que efectuar el disparo. La distancia s hasta el blanco se calcula de la manera siguiente:

$$y = h + v_0 t \operatorname{sen} \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad x = v_0 t \cos \alpha.$$

De aquí $y = 0$ con

$$t = t_0 = \frac{v_{med} \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{v_{med}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2gh}}{g}.$$

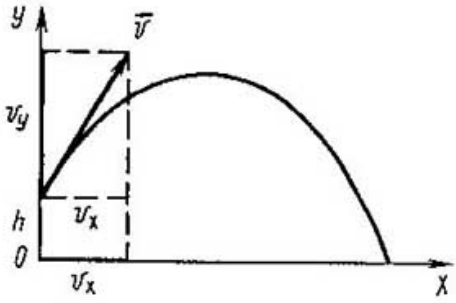


Fig. 235

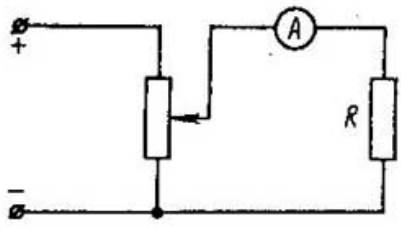


Fig. 236

Por consiguiente,

$$s = v_{med}\, t_0 \cos \alpha .$$

La dispersión de las velocidades iniciales de salida de la bola determina la dispersión de la distancia de su vuelo, lo que a su vez determina las dimensiones del cajón en el cual el experimentador debe dar con la bola.

207. Para solucionar el problema hay que armar el circuito mostrado en la figura 236. En este circuito por el reóstato fluye la corriente que es mucho menor que la máxima admisible (5 A). Menor que la máxima admisible (30 W) será también la potencia del calentador:

$$p = \frac{U^2}{R_C} = 12{,}5 \text{ W}.$$

En el calorímetro se echa agua. La masa del agua m_a se determina pesando el calorímetro vacío y el calorímetro con agua. A continuación en el agua se inmerge el calentador y se determina el tiempo τ_1 durante el cual el agua y el calorímetro se calientan desde la temperatura t_1 = 50 °C hasta la temperatura t_2 = 55 °C. Si I es la intensidad de corriente consumida por el calentador, menospreciando la pérdida de calor se puede anotar:

$$I^2 R\tau_1 = (c_a m_a + C)\ (t_2 - t_1),$$

en donde C es la capacidad calorífica del calorímetro y del calentador, c_a, el calor específico del agua, R, la resistencia del calentador. Ejecutando seguidamente mediciones analógicas al echar en el calorímetro el aceite mineral, obtenemos la igualdad

$$I^2 R\tau_2 = (c_{ac} m_{ac} + C)\ (t_2 - t_1),$$

en donde τ_2 es el tiempo de calentamiento del calorímetro y del aceite desde la temperatura $t_1 = 50$ °C hasta la temperatura $t_2 = 55$ °C, c_{ac} el calor específico del aceite, m_{ac} la masa del aceite. De estas ecuaciones hallamos:

$$c_{ac} = \frac{I^2 R (\tau_2 - \tau_1) + c_a m_a (t_2 - t_1)}{m_{ac} (t_2 - t_1)}.$$

Para elevar precisión de las mediciones hay que verter en el calorímetro volúmenes iguales del agua y del aceite. Esto asegura iguales condiciones de transferencia de calor.

El resistor variable lo hay que conectar según el esquema de potenciómetro, ya que al conectar el calentador, si no se halla inmergido en el líquido, ya que debido a baja transferencia de calor puede ser inutilizado.

Este trabajo se lo puede realizar con mayor precisión si se toma en consideración la fuga de calor desde el calorímetro. Con este objetivo hay que determinar la intensidad de corriente I_0, con la cual la temperatura del líquido en el calorímetro no varía con el tiempo permaneciendo igual a 52,5 °C. La potencia P_f de fuga de calor en este caso se calcula como sigue:

$$P_f = I_0^2 R_c,$$

y el valor de la potencia útil es igual a

$$P = P - P_f = (I^2 - I_0^2) R.$$

208. Al conectar a los bornes 1 y 2 el generador acústico y a los bornes 3 y 4 el voltímetro de válvula se mide la tensión con dos valores diferentes de la frecuencia ν_1 y ν_2. Si, al cambiar la frecuencia del generador, la tensión no varía, en la caja se encuentra o bien el circuito c o el circuito d. La resistencia del voltímetro de válvula es mucho mayor que la resistencia del circuito R – C. Por ello acusará la tensión en los bornes del generador, la que no debe depender de la frecuencia (esto se puede comprobar en un ensayo aparte acoplando el voltímetro a los contactos 2 y 4).

Pero si con el aumento de la frecuencia las indicaciones del voltímetro aumentan, en la caja se halla el circuito a (con el crecimiento de la frecuencia la resistencia del condensador disminuye y la tensión se toma del resistor).

Por último, en el caso, cuando al aumentar la frecuencia las indicaciones del voltímetro disminuyen, se puede afirmar que en la caja se halla el circuito b (la tensión en este circuito se toma del condensador).

Para determinar los parámetros de los elementos en los circuitos a y b hagamos uso de los resistores complementarios.

En el caso del circuito a acoplemos el resistor R_1 a los bornes 3 y 4

en paralelo al resistor R que se encuentra en la caja. Designemos la tensión en los bornes 2 y 4 con U_0, la tensión en los bornes 3 y 4, antes de ser acoplado el resistor R_1, con U_1 y la tensión en estos bornes, después de acoplar el resistor, con U_2. Anotemos la ley de Ohm para estos dos casos:

$$U_1 = I_1 R = \frac{U_0 R}{\sqrt{X_C^2 + R^2}},$$

$$U_2 = I_2 R_e = \frac{U_0 R_e}{\sqrt{X_C^2 + R_e^2}},$$

donde

$$R_e = \frac{RR_1}{R + R_1}, \quad X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}.$$

De aquí

$$R = R_1 \left(\frac{U_1}{U_2}\sqrt{\frac{U_0^2 - U_2^2}{U_0^2 - U_1^2}} - 1\right), \quad C = \frac{U_1}{2\pi\nu R\sqrt{U_0^2 - U_1^2}}.$$

En el caso del circuito b acoplemos el resistor R_1 a los bornes 2 y 3 en paralelo al resistor R que se halla en la caja. Adoptando las mismas designaciones que en caso anterior, anotemos la ley de Ohm para el circuito con el resistor y sin éste:

$$U_1 = I_1 X_C = \frac{U_0 X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}},$$

$$U_2 = I_2 X_C = \frac{U_0 X_C}{\sqrt{R_e^2 + X_C^2}},$$

donde

$$R_e = \frac{RR_1}{R + R_1}.$$

Al realizar transformaciones simples obtenemos:

$$R = R_1 \left(\frac{U_2}{U_1}\sqrt{\frac{U_0^2 - U_1^2}{U_0^2 - U_2^2}} - 1\right), \quad C = \frac{\sqrt{U_0^2 - U_1^2}}{2\pi\nu U_1 R}.$$

Si, al cambiar la frecuencia, la tensión U no varía, en la caja se encuentra el circuito c o el circuito d. Para determinar cuál de estos circuitos se halla allí, a los bornes 3 y 4 se acopla el resistor R_1 y se mide la tensión $U_1 = U_{3-4}$ y $U_2 = U_{2-3}$ (fig. 237), y a continuación se calcula la resistencia Z del circuito R – C para distintas frecuencias ν.

$$Z = \frac{U_2}{I}, \quad I = \frac{U_1}{R_1}, \quad Z = \frac{U_2}{U_1} R_1.$$

Según los resultados de mediciones se construye el gráfico de dependencia Z = f (ν). Si este gráfico tiene el aspecto ofrecido en la figura 238, a, entonces el circuito de la caja está montado según el esquema c. Pero si el gráfico señalado tiene el aspecto representado en la figura 238, b, el circuito está realizado según el esquema d. Con frecuencias bajas la resistencia total Z en el caso del esquema c es próxima a la resistencia R y en el caso del esquema d, de la capacitancia del circuito X_C. Con frecuencias elevadas, al contrario, en el esquema c la resistencia total Z es próxima a X_C y en el esquema d, a R. Conociendo X_C es fácil calcular la capacidad del condensador:

$$C = \frac{1}{2\pi\nu X_C}.$$

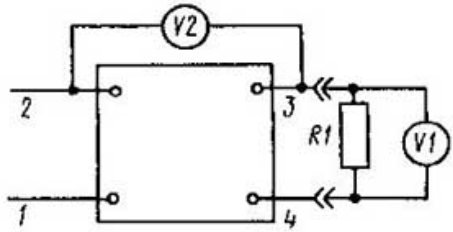


Fig. 237

Para determinar con precisión R y C hay que hallar los valores de Z_1 y Z_2 con dos frecuencias diferentes ν_1 y ν_2; para el esquema d

$$Z_1 = \frac{X_{C1}R}{\sqrt{X_{C1}^2 + R^2}}, \quad Z_2 = \frac{X_{C2}R}{\sqrt{X_{C2}^2 + R^2}};$$

para el esquema e

$$Z_1 = \sqrt{X_{C1}^2 + R^2}, \quad Z_2 = \sqrt{X_{C2}^2 + R^2}.$$

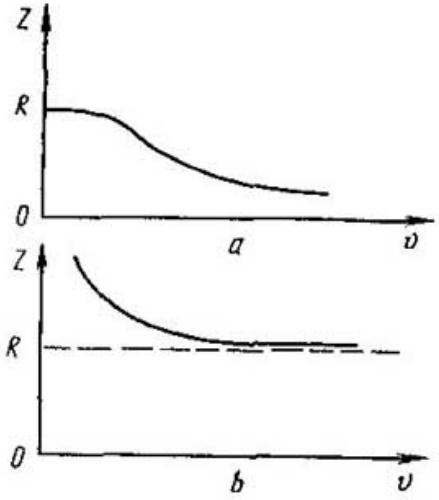


Fig. 238

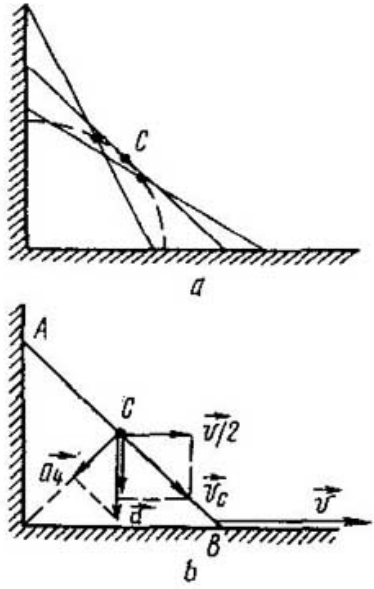


Fig. 239

Los parámetros buscados de R y C se hallan solucionando el sistema correspondiente de ecuaciones.

209. En la cuenta de vidrio actúan la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ y la fuerza $\vec{Q}$ de reacción del palito. Con arreglo a la segunda ley de Newton

$$m\vec{g} + \vec{Q} = m\vec{a},$$

Por consiguiente, si hallamos la aceleración de la cuenta, de esta forma determinaremos la fuerza $\vec{Q}$. Mientras que conforme a la tercera ley de Newton la fuerza $\vec{N}$ con la cual la cuenta actúa en el palito es igual en módulo a la fuerza $\vec{Q}$.

En la figura 239, a se muestran unas cuantas posiciones del palito. Ya que en el triángulo rectangular la mediana, que enlaza la cúspide del ángulo recto con el centro de la hipotenusa, es igual a una mitad de la hipotenusa, entonces la cuenta (el punto C) se halla todo el tiempo a una misma distancia de la cúspide del ángulo recto.

De este modo, la cuenta se mueve por la circunferencia de radio 1. La velocidad v_C de la cuenta está dirigida por la tangente a esta circunferencia y la aceleración centrípeda es igual a $\frac{v_C^2}{l}$.

En cualquier momento de tiempo la velocidad total de la cuanta se suma de las componentes horizontal y vertical. Según los datos del problema la velocidad del punto B es constante e igual a $\vec{v}$. Las velocidades horizontales de todos los demás puntos también son constantes,

siendo la velocidad horizontal de la cuenta igual a $\frac{\vec{v}}{2}$. Esto significa que la aceleración de la cuenta y la fuerza $\vec{Q}$ están dirigidas verticalmente.

En el momento, cuando $\alpha = 45°$, la velocidad $\vec{v}_C$ de la cuenta está dirigida a lo largo del palito, mientras que sus componentes vertical y horizontal son iguales en módulo y equivalen a $\frac{v}{2}$ (fig. 239, b). Por consiguiente, la velocidad total de la cuenta en este momento es igual a $\frac{v}{\sqrt{2}}$. Por ello

$$a_C = \frac{v_C^2}{l} = \frac{v^2}{2l}$$

y

$$a = \sqrt{2a_c} = \frac{v^2}{\sqrt{2}l}.$$

Con arreglo a la segunda ley de Newton

$$N = Q = mg - ma = m\left(g - \frac{v^2}{\sqrt{2}l}\right).$$

210. La presión en el puente se determina por el nivel de agua en el canal. Si por el canal se mueve una barcaza, entonces, hablando en rigor, el agua sube tanto más cuanto más pesada es la barcaza. Sin embargo, prácticamente en todo el canal, el nivel de agua, naturalmente, permanece el mismo, ya que el volumen de agua desplazado por la barcaza es muy pequeño en comparación con el volumen total del agua en el canal.

211. Consideremos que la velocidad angular ω de rotación del tubo se cambia lentamente, ya que con cada valor de ω la bola se encuentra en el estado de equilibrio respecto al tubo, mientras que en el sistema inmóvil de lectura la bola se mueve por la circunferencia de radio $l_0 + \Delta l$ (en donde Δl es la variación de la longitud del muelle). Ya que la aceleración centrípeda $a = \omega^2 (l_0 + \Delta l)$ se comunica a la bola por la fuerza de elasticidad del muelle, entonces según la segunda ley de Newton

$$m\omega^2 (l_0 + \Delta l) = F_{elas}. \qquad (1)$$

Para solucionar el problema hace falta en la ecuación (1) hallar la dependencia entre Δl y ω o, lo que es más cómodo, entre $l = l_0 + \Delta l$ y $m\omega^2$.

La dependencia entre la fuerza de elasticidad del muelle y el alargamiento del mismo se da gráficamente, por ello vamos a solucionar la

ecuación (1) también gráficamente. Copiemos el gráfico desplazando el origen de las coordenadas al punto con la coordenada l_0 (fig. 240, a). Ahora por el eje de abscisas resulta trazada la longitud completa l del muelle. Si del origen de las coordenadas se traza una recta, como coordenadas del punto de intersección de esta recta con el gráfico serán los valores de la fuerza de elasticidad F_{elas} y de la longitud l que le corresponde del muelle y la tangente del ángulo de inclinación de la recta al eje de abscisas será igual a

$$\frac{F_{elas}}{l} = m\omega^2.$$

Para construir el gráfico de dependencia entre l y $m\omega^2$ tracemos desde el origen de las coordenadas un haz de rectas y marquemos todos los puntos de intersección de las rectas con el gráfico. A continuación, conociendo los valores de l y los valores que les corresponden de $m\omega^2 = tg\,\alpha$, vamos a marcarlos en el gráfico de dependencia entre l y $m\omega^2$. En la figura 240, a se ve que con los ángulos $\alpha < \alpha_1$, o sea con $m\omega^2 < tg\alpha_1$, cada una de las rectas trazadas se corta con el gráfico de F_{elas} (l) sólo en un punto. Y a cada valor de $m\omega^2$ corresponde solo un valor de l. Con $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ la recta se corta et tres puntos (con $\alpha = \alpha_1$ y $\alpha = \alpha_2$, en dos), o sea a un mismo valor de $m\omega^2$ corresponden tres valores de l. Marquemos éstos todos en el gráfico.

Con $\alpha > \alpha_2$, o sea con $m\omega^2 < tg\alpha_2$, cada una de las rectas vuelve a intersecarse con el gráfico sólo en un punto y a cada valor de $m\omega^2$ corresponde sólo un valor de l. Enlazando todos los puntos marcados con una curva suave, obtendremos el gráfico mostrado en la figura 240, b.

Con $m\omega^2 < tg\alpha_1$ y con $m\omega^2 > tg\alpha_2$ a cada valor de la velocidad angular corresponde un valor de l. Pero con $tg\alpha_1 < m\omega^2 < tg\alpha_2$ existen

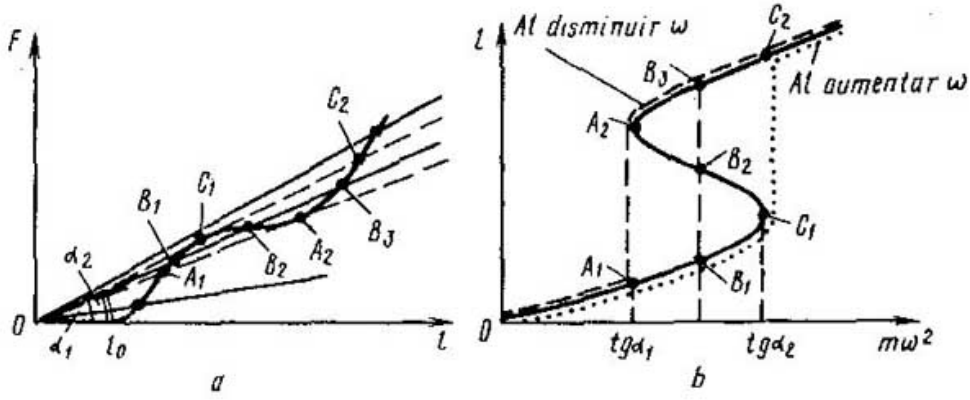


Fig. 240

tres valores diferentes de l para cada valor de $m\omega^2$. ¿A qué distancia del eje de rotación se encuentra la bola?

Ante todo está claro que la bola no puede hallarse a tal distancia que corresponde al punto B_2 del gráfico (ver la fig. 240, a). En efecto, supongamos que por alguna casualidad la bola se ha desviado ligeramente de esta posición de equilibrio, de modo que l aumentó en Δx. Para que la bola de vueltas, hallándose a la distancia $l + \Delta x$ del eje, la fuerza de elasticidad debe crecer. Como se ve en la figura, en el caso en cuestión la fuerza de elasticidad disminuye. Por consiguiente, esta fuerza no puede imprimir a la bola la aceleración centrípeda necesaria para su movimiento, y la bola seguirá moviéndose a lo largo del tubo hacia la posición B_3. De este modo, el punto B_2 corresponde a la posición del equilibrio inestable de la bola. De una manera similar se puede demostrar que los puntos B_1 y B_3 corresponden a las posiciones del equilibrio estable de la bola. Por ello con $tg\alpha_1 < m\omega^2 < tg\alpha_2$ la bola puede hallarse en las posiciones rorrespondientes a los tramos A_1C_1 y A_2C_2 del gráfico.

¿Pero en cuál de sus posiciones estables estará la bola? La respuesta a esta pregunta depende de cómo varía la velocidad angular de rotación del tubo. Si ω aumenta, la bola no puede situarse en las posiciones correspondientes al tramo A_2C_2 del gráfico sin pasar por las posiciones que corresponden al tramo A_1C_1, cada una de las cuales es estable.

Por consiguiente, al aumentar la velocidad angular ω la variación se ve en el gráfico mostrado en la figura 263, b a la derecha (en el punto $m\omega^2 = tg\,\alpha_2$ el valor de l varía a salto desde el valor correspondiente al punto C_1 hasta el valor que corresponde al punto C_2).

Pero al disminuir la velocidad angular el gráfico de dependencia entre l y $m\omega^2$ será tal como se muestra en la misma figura a la izquierda. Claro está, hay que tener en cuenta que si el tubo gira con tal velocidad angular que $tg\alpha_1 < m\omega^2 < tg\,\alpha_2$, entonces empujando con fuerza la bola se puede pasarla a la posición que corresponde al tramo "ajeno" del gráfico, por el cual seguirá variando a continuación l con el cambio de la ω.

212. El refrigerador (nevera) funciona por el ciclo inverso al ciclo de funcionamiento de la máquina de calor: con el cuerpo de trabajo (gas-agente) se efectúa un trabajo determinado y el calor se transfiere del cuerpo más frío al más caliente. Con ello, al cuerpo caliente se le transfiere no sólo la cantidad de calor tomado del cuerpo frío, sino también el calor equivalente al trabajo realizado. En el refrigerador de casa el gas-agente licuado, evaporándose, roba el calor de las paredes de la cámara de evaporación. Seguidamente este gas, licuándose de nuevo en el condensador, transfiere el calor al aire circundante.

Si la pared del refrigerador está abierta, el calor se toma por el evaporador del aire circundante y se transfiere por el condensador al mismo aire en la habitación. El aire recibe el calor equivalente al trabajo realizado y el calor que se desprende en los conductores de alimentación y en el arrollamiento del motor eléctrico del compresor. Por ello,

con la pared del refrigerador abierta la temperatura en la habitación irá subiendo hasta que la cantidad de calor, que llega a la habitación, sea igual al calor que se va de la habitación a la calle. El termorregulador en este caso no va a funcionar. Como gráfico de variación de la temperatura en la habitación es la línea 1 en la figura 241. Esta línea se acerca asintóticamente a la recta $T = T_1$.

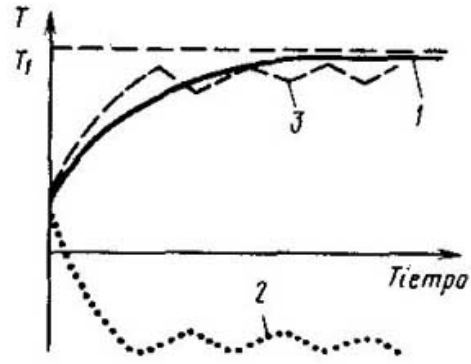


Fig. 241

En el caso del refrigerador cerrado la temperatura dentro del mismo (en la cámara de refrigeración) primero va a bajar, mientras que en la habitación la temperatura irá en aumento algo más rápido que cuando el refrigerador se halla abierto (ahora el calor se toma no del aire en la habitación, sino del aire que se encuentra en el volumen limitado del armario del refrigerador y se transfiere al aire en la habitación). En este caso la temperatura en la habitación puede llegar a ser tanto superior como inferior a T_1. Esto depende de la intensidad del intercambio de calor entre la habitación y el aire exterior y de que temperatura dentro del refrigerador acciona el termorregulador (o sea del tiempo de funcionamiento continuo del refrigerador).

Cuando la temperatura en el refrigerador alcanza un valor determinado, el termorregulador desconectará el refrigerador de la red y la temperatura dentro del refrigerador va a subir progresivamente a costa del intercambio de calor a través de las paredes del refrigerador. A continuación el refrigerador vuelve a conectarse y la temperatura en la cámara va a bajar. La línea 2 en la figura 241 es el gráfico de dependencia entre la temperatura en el interior del refrigerador y el tiempo.

En consonancia con las fluctuaciones de la temperatura en la cámara refrigeradora cambia también la temperatura en la habitación. Pero ya que en el momento de desconectarse el refrigerador de la red la temperatura del condensador es superior a la temperatura en la habitación, la temperatura en la habitación cierto tiempo sigue subiendo.

Luego la temperatura en la habitación va a bajar hasta que el refrigerador vuelva a conectarse y así por el estilo.

Una de las curvas de dependencia entre la temperatura en la habitación y el tiempo se muestra en la figura 241 (curva 3). Claro está que en realidad las fluctuaciones de la temperatura en la habitación durante el funcionamiento del refrigerador son insignificantes y es prácticamente imposible notarlas.

Cuando el refrigerador está lleno de víveres, aumenta tanto el tiempo, durante el cual éste se halla conectado, como el tiempo en el cual está desconectado. Con arreglo a ello cambia también el período de fluctuaciones de la temperatura en la habitación.

213. La presión de gas en el recipiente es igual a

$$p_1 = n_1 kT_1 = 4n_1 kT,$$

en donde n_1 es la concentración de las moléculas en el recipiente (el número de las moléculas en una unidad de volumen) y k, la constante de Boltzmann. Fuera del recipiente la presión es igual a

$$p = n_2 kT,$$

en donde n_2 es la concentración de las moléculas en el espacio ambiente. Por consiguiente,

$$p_1 = 4p \frac{n_1}{n_2}.$$

De este modo, para hallar la presión en el recipiente es suficiente determinar la relación de las concentraciones de las moléculas de gas en el recipiente y en el espacio ambiente.

En el caso del equilibrio el número de moléculas de gas que abandonan el recipiente es igual al número de moléculas de gas que entran en el recipiente desde fuera en el mismo tiempo. El número de las moléculas que salen del recipiente en el tiempo Δt es igual a

$$Z_1 = \frac{1}{2} n_1 S |\overline{v_{1X}}| \Delta t,$$

en donde $|\overline{v_{1X}}|$ es el valor medio del módulo de proyección de la velocidad de la molécula sobre el eje X dirigida por el eje del orificio y S la superficie del orificio. El número de las moléculas que entran en el recipiente en el mismo tiempo es igual a

$$Z_2 = \frac{1}{2} n_2 S |\overline{v_{2X}}| \Delta t.$$

Con tal que $Z_1 = Z_2$, entonces

$$n_1 |\overline{v_{1x}}| = n_2 |\overline{v_{2x}}|.$$

Pero la magnitud de $|\overline{v_x}|$ es proporcional a la velocidad térmica de las moléculas de gas:

$$|\overline{v_x}| \sim v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{|\overline{v_{2x}}|}{|\overline{v_{1x}}|} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{1}{2}.$$

Utilizando esta relación hallamos la presión de gas en el recipiente:

$$p_1 = 2p.$$

214. Las bolitas se alejan una de otra bajo la acción de la fuerza de repulsión eléctrica:

$$F = k\frac{q^2}{r^2},$$

en donde q es la carga de cada bolita; r, la distancia entre las bolitas y

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Esta fuerza y, por consiguiente, las aceleraciones de las bolitas se cambian en módulo a medida que va cambiando la distancia entre las mismas. Por ello el movimiento de las bolitas no será uniformemente acelerado.

Dividamos los desplazamientos de las bolitas en el primer y segundo casos en un número igual de tramos, tales que los desplazamientos en ambos casos sean iguales. Designemos con $2x_0$ la distancia entre las bolitas en el momento inicial y en cierto momento subsiguiente con $2x$. El valor $\zeta = \frac{x}{x_0}$ es el desplazamiento relativo de las bolitas.

Sea que ζ ha variado en la magnitud $\Delta\zeta$. Entonces el desplazamiento de cada bolita en el primer caso (cuando $2x_0 = l$) es igual a

$$\Delta x_1 = \Delta\zeta \cdot \frac{l}{2},$$

y en el segundo caso (cuando $2x_0 = 3l$)

$$\Delta x_2 = \Delta\zeta \cdot \frac{3}{2} l .$$

Por ello

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = 3.$$

Ahora comparemos las velocidades medias de las bolitas. Para ello hagamos uso de la ley de conservación de la energía. En el momento inicial las bolitas poseen sólo la energía potencial de la interacción eléctrica:

$$W_0 = k \frac{q^2}{2x_0}.$$

Cuando la distancia entre las bolitas llegue a ser igual a 2x, su energía potencial tomará el valor

$$W = k \frac{q^2}{2x},$$

y la energía cinética, el valor

$$W_C = 2 \frac{mv^2}{2},$$

en donde m es la masa de la bolita. Según la ley de conservación de la energía

$$k \frac{q^2}{2x_0} = k \frac{q^2}{2x} + mv^2.$$

De aquí

$$v = \sqrt{k \frac{q^2 (\zeta - 1)}{2x_0 m\zeta}}.$$

De este modo, con un mismo valor del desplazamiento relativo la velocidad de la bolita en el primer caso es mayor que en el segundo

$$\sqrt{\frac{q^2}{ml}} : \sqrt{\frac{q^2}{3ml}} = \sqrt{3} \text{ veces.}$$

Caso de variar en la magnitud $\Delta\zeta$, las velocidades medias de las bolitas van a diferir también $\sqrt{3}$ veces:

$$\frac{v_{med.1}}{v_{med.2}} = \sqrt{3}.$$

Los lapsos de tiempo, en los cuales las bolitas se desplazan en Δx_1 en el primer caso y en Δx_2 en el segundo, son iguales respectivamente a

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_{med.1}}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_{med.2}}.$$

De aquí

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \frac{v_{med.1}}{v_{med.2}} = 3\sqrt{3}.$$

Por consiguiente, con cualquier variación de la magnitud de ζ el tiempo de movimiento en el primer caso es mayor que el tiempo de movimiento en el segundo $3\sqrt{3}$ veces. Al doblarse las distancias entre las bolas el tiempo total t_2 será mayor que el tiempo t_1 también $3\sqrt{3}$ veces:

$$t_2 = 3\sqrt{3}t_1 = 3\sqrt{3}t.$$

215. Examinemos una de las espiras del muelle, por ejemplo la espira ABC (fig. 242, a). Al deformarse el muelle ambas mitades de esta espira se viran apartándose del plano horizontal a iguales ángulos α. Si la deformación del muelle es pequeña, son pequeños también los ángulos α. En la sección B sobre el alambre del lado de la parte inferior del muelle actúa la fuerza $\vec{F}$ (que estira el muelle). El momento de esta fuerza es igual a

$$M = FR,$$

en donde R es el radio de espiras del muelle. Merced al momento M el alambre se tuerce alrededor de su eje, mientras que merced a la fuerza $\vec{F}$ el mismo se encorva. Menospreciando la deformación de flexión y considerando que el coeficiente de elasticidad en el caso de la flexión es más grande, hallaremos cómo el alargamiento del muelle está relacionado con el ángulo φ, al cual se tuerce el alambre. Es evidente que al extenderse el muelle la sección C no se vira (al extenderse el muelle la parte superior AC y la parte inferior CB de la espira se viran a ángulos iguales en sentidos opuestos). No se viran tampoco las secciones A y B (sólo se apartan ligeramente en el plano perpendicular a la figura, en consonancia con la variación de inclinación de la espira).

Una simple inclinación de la mitad de la espira BC al ángulo α provocará el viraje de las secciones B y C al ángulo α (fig. 242, b, c). Pero las

secciones B y C han de quedarse orientadas como en el muelle no deformado. El viraje de la sección C originará el enrollamiento de la mitad de la espira al ángulo α en el sentido de las agujas de reloj (fig. 242, d). Al mismo ángulo se enrolla el alambre al girar al ángulo α la sección B (fig. 242, e). Por consiguiente, la mitad de la espira gira al ángulo 2α. Mientras que toda la espira se enrolla al ángulo 4α y todo el alambre al ángulo

$$\varphi = 4n\alpha,$$

en donde n es el número de espiras del muelle.

Ya que la longitud de una espira es igual a $2\pi R$ y la del alambre es l, entonces

$$n = \frac{l}{2\pi R}$$

y

$$\varphi = \frac{2l\alpha}{\pi R} \quad .$$

Es notorio que el alargamiento del resorte en una espira (ver la fig. 242) es igual a

$$2\,\Delta h = 4R \operatorname{sen} \alpha.$$

o (ya que el ángulo α es pequeño y $\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha$)

$$2\Delta h \approx 4\,R\alpha.$$

El alargamiento de todo el muelle (en n espiras) es igual a

$$\Delta H = 4nR\,\alpha.$$

Designemos el coeficiente de elasticidad del muelle con μ. Entonces

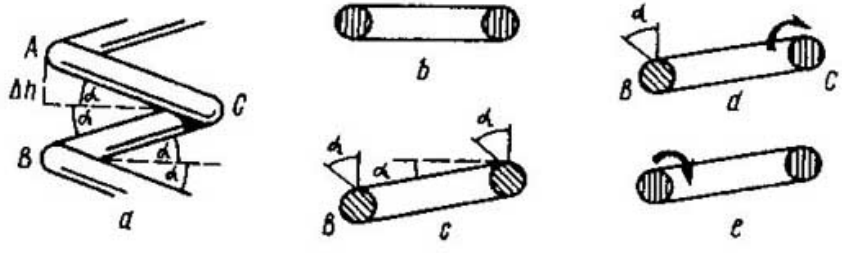


Fig. 242

$$F = \mu \cdot \Delta H.$$

Por otro lado,

$$F = \frac{M}{R}.$$

Por consiguiente,

$$\mu \cdot \Delta H = \frac{M}{R} = \frac{k\varphi}{R}.$$

De aquí

$$\mu = \frac{k\varphi}{R \cdot \Delta H} = \frac{k \cdot 4\pi\alpha}{R \cdot 4\pi R\alpha} = \frac{k}{R^2}$$

216. Ante todo notemos que como el ancho del marco de ventana es constante, el eje óptico del objetivo es horizontal. Las líneas, paralelas al eje óptico del objetivo, en la foto deben intersecarse "a la infinidad" en un punto. Es fácil darse cuenta de que las hojas horizontales de ventana realmente se cortan en un punto (fig. 243). Si a través de este punto se traza un plano horizontal, en este plano se encontrará también el eje óptico del objetivo. Por consiguiente, la altura, a la cual se halla el punto de intersección, es igual a la altura a la que se dispone la cámara fotográfica. Esta altura puede ser comparada con el tamaño de la manija del marco cuyo largo puede ser adoptado igual a 10 cm. En la foto su largo es de 1 cm. Ya que en la foto AB = 4,5 cm, en realidad $h \approx 45$ cm.

La distancia que media entre el objetivo y la ventana es mucho mayor que la distancia focal. Por ello se puede considerar que la película fotográfica se hallaba en el plano focal del objetivo. Si l_0 es la distancia

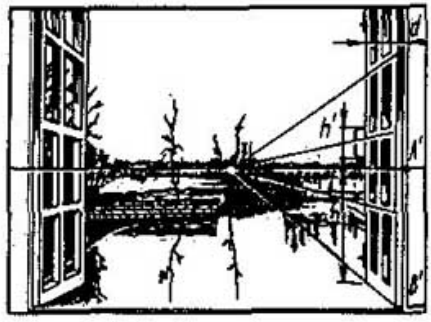


Fig. 243

que media hasta la ventana y H, la altura de un elemento de la misma, entonces

$$\frac{l_0}{H} = \frac{f}{h'},$$

en donde h' es el tamaño de la imagen de este elemento en el negativo. Es 10 veces menor que el tamaño de la imagen del mismo elemento de la ventana en la foto reproducida. En la foto h = 5,5 cm. Por consiguiente, h' = 0,45 cm y H ≈ 55 cm. Por ello

$$l_0 = f\frac{h}{h'} = \frac{55}{0{,}45} \cdot 4 \text{ cm} = 370 \text{ cm} = 3{,}7 \text{ m}.$$

De manera analógica hallaremos la distancia hasta el puente. Para ello hace falta conocer el tamaño de algún elemento del puente ya que la altura de barandilla puede ser tomada igual a 0,8 m. El tamaño de su imagen en la foto ≈ 0,3 cm y en el negativo es de 0,03 cm. Consiguientemente,

$$l = f\frac{0{,}8}{0{,}0003} \approx 107 \text{ m}.$$

217. En el sistema de lectura en el cual la Tierra primero se hallaba en reposo, mientras que los automóviles se movían con las velocidades v, en conformidad con la ley de conservación del impulso tenemos:

$$2mv = m(2v - u) + m(v - u) + Mu,$$

en donde M es la masa de la Tierra y u, la velocidad adquirida por la misma.
De aquí

$$u = -v\frac{m}{M - 2m}.$$

Ya que $m \ll M$, entonces $|u| \ll |v|$. El trabajo A ejercido per el motor es igual a la variación de la energía del sistema:

$$A = \frac{m(2v - u)^2}{2} + \frac{m(v - u)^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} - 2\frac{mv^2}{2}. \qquad (1)$$

La energía cinética

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\frac{mM}{(M - 2m)^2} \approx \frac{m}{M}\frac{mv^2}{2}.$$

adquirida por la Tierra es mucho menor que la variación de la energía de un automóvil y de esta magnitud se puede prescindir. Se puede prescindir también de la velocidad u en comparación con el valor de la velocidad v en la expresión (1). Esto corresponde a lo que nosotros consideramos como sistema inercial e "inmóvil" de lectura relacionado con la Tierra. Como resultado obtendremos:

$$A = \Delta E = \frac{3}{2} mv^2.$$

Ahora consideremos el sistema de lectura que se mueve con la velocidad de uno de los automóviles. En éste sistema el impulso inicial es igual a $-Mv$. Con arreglo a la ley de conservación del impulso

$$-Mv = mv + Mu,$$

en donde u es la nueva velocidad de la Tierra. De esta ecuación obtenemos:

$$u = -\frac{M + m}{M} v.$$

Y nuevamente el trabajo A del motor es igual a la variación de la energía cinética de todo el sistema:

$$A = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - \frac{Mv^2}{2}.$$

La variación de la energía cinética de la Tierra, no tomada en consideración en los datos del problema, en este caso no es nada pequeña y equivale a

$$\frac{Mu^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} \left(\frac{M + m}{M}\right)^2 - \frac{Mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \frac{m}{M} + mv^2 \approx mv^2.$$

Por ello

$$A = \frac{mv^2}{2} + mv^2 = \frac{3}{2} mv^2,$$

como en el primer caso.

La respuesta incorrecta fue obtenida a causa de aplicar la ley de conservación de la energía al sistema no cerrado.

218. Si no existiera el condensador B, una vez cerrada la llave, en el circuito surgirían oscilaciones electromagnéticas. Mediante la ley de conservación de la energía se podría de inmediato hallar la corriente

máxima. Pero con el condensador B primero se producirá la redistribución de la carga entre los condensadores y sólo después en el circuito se establecerán las oscilaciones. En efecto, el tramo del circuito constituido de dos condensadores y conductores de conexión también puede considerarse como circuito oscilante. Pero la inductancia del mismo – inductancia de conductores – es muy pequeña (en comparación con L), por eso la frecuencia propia de las oscilaciones en este circuito será muy grande (mucho más grande que la frecuencia propia de las oscilaciones en el circuito formado por los condensadores y la bobina de inductancia). Claro está que este circuito posee también una resistencia activa, pero ésta es muy pequeña en comparación, por ejemplo, con la resistencia inductiva. Por ello, en el curso de cierto tiempo, después de haber cerrada la llave, las oscilaciones en el circuito pueden considerarse no amortiguadas. En el circuito que consta de condensadores y conductores se producirán muchas oscilaciones de corriente en tanto que la corriente en la bobina pueda considerarse igual a cero. Debido a la resistencia de los conductores las oscilaciones en este circuito serán amortiguadas. Esto hace que se establezca rápidamente el equilibrio y la redistribución equitativa de las cargas entre condensadores (las capacidades de los últimos son iguales). Con ello una parte de la energía del campo eléctrico del condensador cargado A pasará a la energía interna.

Hallemos cuál parte de la energía se queda en el circuito después de redistribuirse rápidamente la carga entre los condensadores. La carga inicial del condensador A fue igual a

$$Q = CU.$$

Al redistribuirse la carga entre condensadores sus cargas llegaron a ser iguales a $\frac{Q}{2}$, mientras que la energía a

$$W = \frac{Q^2}{8C} = \frac{CU^2}{8}.$$

Por consiguiente, la energía total que se queda en el circuito es igual a

$$\frac{CU^2}{8} + \frac{CU^2}{8} = \frac{CU^2}{4}.$$

Ya que antes de haber cerrada la llave la energía en el circuito fue igual a

$$W_0 = \frac{CU^2}{2},$$

entonces a la interna pasó una mitad de la energía inicial del condensador A.

Ahora consideremos el circuito compuesto por condensadores y la bobina de inductancia. La corriente en la bobina será máxima, cuando los condensadores se descargarán del todo y su energía pasará a la energía del campo magnético en la bobina. De la ley de conservación de la energía se desprende que

$$\frac{CU^2}{4} = \frac{LI^2_{máx}}{2}.$$

De aquí

$$I_{máx} = U\sqrt{\frac{C}{2L}}.$$

219. Primero consideremos el caso, cuando la placa cae verticalmente hacia abajo con una velocidad constante $\vec{v}$. En los electrones que caen junto con la placa, de parte del campo magnético actúa la fuerza de Lorentz (fig. 244):

$$F = evB,$$

en donde e es la carga del electrón. Bajo la acción de esta fuerza los electrones van a desplazarse hacia el lado derecho (según la figura) de la placa. La redistribución de los electrones dentro de la placa ocasionará el surgimiento del campo eléctrico dirigido de izquierda a derecha (ver la fig. 12). El desplazamiento de los electrones va a efectuarse hasta que la fuerza de Lorentz sea equilibrada por la fuerza $\vec{F}_e$ que ejerce en los electrones el campo eléctrico:

$$evB = eE.$$

De aquí

$$E = vB.$$

Entre los planos de la placa surge la diferencia de potenciales

$$U = Ed = Bvd.$$

Ya que el espesor de la placa es mucho menor que su radio, el campo eléctrico dentro de la placa puede considerarse homogéneo (se puede

prescindir de los efectos marginales). De este modo, la placa puede ser considerada como un condensador plano cuya tensión U entre las superficies es igual a

$$Ed = Bvd,$$

y la carga a

$$q = CU = \frac{\varepsilon_0 S}{d} Bvd = \varepsilon_0 SBv,$$

en donde $S = \pi R^2$ es la superficie de la placa.

Esta carga depende de la velocidad de movimiento de la placa. Si la placa se mueve con cierta aceleración, su velocidad crece. En este caso, con el correr del tiempo van a cambiar también las cargas en los lados de la placa. Por consiguiente, al variar la velocidad de la placa en la misma surge la corriente eléctrica

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \varepsilon_0 SB \frac{\Delta v}{\Delta t} = \varepsilon_0 SBa,$$

en donde $\vec{a}$ es la aceleración de la placa. Pero en el conductor con corriente en el campo magnético actúa una fuerza. En nuestro caso esta fuerza es igual en módulo a

$$F = BId$$

y está dirigida verticalmente hacia arriba. De esta forma, además de la fuerza de gravedad en la placa durante la caída de ésta de parte del campo magnético actuará asimismo la fuerza de Lorentz F. Por ello la ecuación de movimiento de la placa se escribirá como sigue:

$$ma = mg - BId,$$

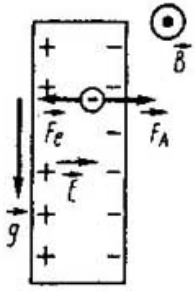


Fig. 244

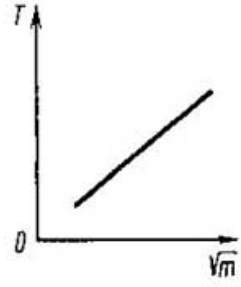


Fig. 245

o

$$ma = mg - B^2 d\xi_0 a\pi R^2.$$

De aquí

$$a = \frac{g}{1 + \frac{B^2 d\zeta_0 \pi R^2}{m}}$$

220. En el sistema de coordenadas que se mueve a lo largo del canalón con la velocidad igual en módulo a la proyección de las velocidades de las bolitas sobre la generatriz del canalón, todas las bolitas se mueven en un plano perpendicular a la generatriz del canalón. Con ello, a bajas velocidades "transversales" las bolitas ejecutan oscilaciones armónicas moviéndose por la circunferencia. Ya que el período de oscilaciones no depende de la amplitud, dentro de una mitad del período las bolitas se encontrarán en la generatiriz del canalón, donde empezaron su movimiento.

Siendo grande la amplitud de las oscilaciones (altas velocidades "transversales), éstas no serán armónicas: su período dependerá de la amplitud y las bolitas no se encontrarán al mismo tiempo.

221. Suspendiendo del resorte las cargas de masa diferente se puede medir el período de oscilaciones del resorte con carga para cada caso:

$$T = \frac{t}{n},$$

en donde t es el tiempo necesario para ejecutar n oscilaciones.

A continuación hay que construir el gráfico de dependencia entre el período de oscilaciones de la carga en el resorte y la masa de la carga $T = f(m)$.

Según la configuración de la curva se puede darse cuenta que es una parábola simétrica respecto al eje Om. Para confirmar esta conjetura hay que construir el gráfico de dependencia de $T = f(\sqrt{m})$. Si este gráfico constituye una recta que pasa por el origen de las coordenadas (fig. 245), esto significa que

$$T \sim \sqrt{m}.$$

Con una masa determinada de la carga sus oscilaciones elásticas a lo largo del resorte pasan a las oscilaciones de péndolo de la carga y a continuación, al cabo de cierto tiempo, las oscilaciones de péndolo vuelven a pasar a las longitudinales y así sucesivamente. Las mediciones efectuadas demuestran que tal trasiego de la energía se observa con la siguiente relación entre los períodos T_p de las oscilaciones pendulares y los T_l de las oscilaciones elásticas longitudinales:

$$T_p = 2T_l.$$

Este efecto de producción de las oscilaciones pendulares se explica por la variación periódica de la longitud del péndolo l debido a las oscilaciones longitudinales de la carga (surgen las llamadas oscilaciones paramétricas). La desviación inicial de la carga respecto de la recta, a lo largo de la cual se producen las oscilaciones elásticas longitudinales, es originada por causas casuales. Para que sea intensivo el paso de las oscilaciones elásticas longitudinales a las pendulares, además de la relación $T_p = 2T_l$, ha de satisfacerse también la condición, según la cual la carga debe elevarse en el momento, cuando el péndolo pasa la posición media, y bajar, cuando el mismo se halla en la posición extrema. Debido a que la fuerza de tensión en la posición extrema es menor, la energía que se transmite al péndolo durante su elevación, será mayor que la energía que se le sustrae durante la bajada. Progresivamente la energía de las oscilaciones elásticas va a pasar a la energía de las oscilaciones pendulares de la carga. A continuación se produce el trasiego inverso de la energía.

222. Ante todo, con ayuda del voltímetro hay que convencerse de que la "caja" no contiene el manantial de la FEM. Luego se determinan las rupturas existentes en el circuito. Con ayuda del manantial y del miliamperímetro se comprueban todos los pares de terminales con distinta polaridad del manantial. Con ello se descubre que el borne 3 está desocupado (o al mismo se halla conectado un condensador de pequeña capacidad).

Resultó que las indicaciones del amperímetro, al ser conectado el manantial de corriente a los bornes 2 y 4 (fig. 246), dependen de la dirección de la corriente. Por consiguiente, en este tramo se encuentra un diodo. Designemos con I_{24} la intensidad de corriente que pasa por el diodo en el sentido directo. Entonces, según las indicaciones del voltímetro acoplado a los bornes 1 y 2 se puede determinar la resistencia R_2 y

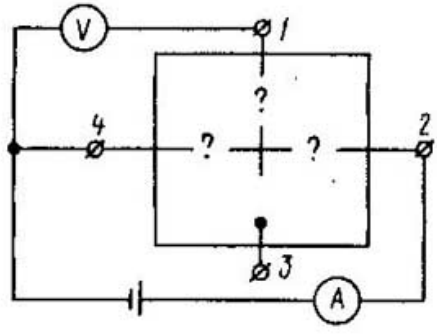


Fig. 246

según las indicaciones del voltímetro acoplado a los bornes 1 y 4, la resistencia R_3:

$$R_2 = \frac{U_{12}}{I_{24}}, \qquad R_3 = \frac{U_{14}}{I_{24}}.$$

Al variar la polaridad del manantial de corriente acoplato a los bornes 4 y 2 obtenemos las indicaciones de los voltímetros:

$$U_{14} = \mathcal{E}, \qquad U_{12} = 0.$$

De ello se deduce que el diodo está acoplado en el tramo 0–4.

La resistencia R_1 se determina con facilidad:

$$R_1 + R_2 = \frac{U_{21}}{I_{21}} = \frac{U_{12}}{I_{12}}, \qquad R_1 = \frac{U_{21}}{I_{21}} - R_2.$$

Los resultados de las mediciones permiten determinar el esquema de la "caja negra" y los parámetros de sus elementos (ver la fig. 68, b).

Variando la intensidad de la corriente que pasa por el tramo 0–4, se puede construir la característica del diodo.

En la caja puede hallarse el sistema cuyo esquema se ofrece en la figura 68, a; es posible que en el tramo 0–4 se encuentra el diodo con la resistencia directa R_3, mientras que el resistor en este tramo no existe (fig. 68, b). En todo caso la suma de la resistencia directa del diodo con la resistencia del resistor R, si lo hay, es igual a R_3.

Durante la ejecución del trabajo son inevitables los errores en las mediciones originados por la presencia de las resistencias internas del miliamperímetro y del manantial de corriente, así como por el hecho de que la resistencia del voltímetro tiene un valor finito. Con el objeto de que el manantial no resulte cortocircuitado a través del miliamperímetro (a fin de evitar el deterioro del instrumento) hace falta con ayuda del manantial de corriente y del voltímetro comprobar que la "caja negra" no tiene líneas cortocircuitadas (al acoplarse a los bornes cortocircuitados la tensión que acusa el voltímetro es aproximadamente igual a la FEM del manantial).

223. La respuesta a esta pregunta del problema parece muy simple y trivial. Si, por ejemplo, la mitad superior de la lente es tapada por una cortina opaca C, disminuirá sólo la iluminación de la imagen. Como se ve en la figura 247, a la imagen real del punto A será creada en la pantalla por los rayos que pasaron a través de la mitad inferior de la lente. El ensayo confirma esta conclusión si el objeto AB representa un cuerpo autoluminoso, por ejemplo el filamento de una lámpara de incandescencia.

Pero si la cortina C es desplazada más cerca al filamento, los rayos

procedentes del punto A no darán con la lente y en la pantalla se obtendrá la imagen sólo de la parte BC del filamento AB (fig. 247, b).

Si la imagen real del filamento se observa directamente con el ojo (claro está, haciendo uso de la película atenuativa de luz), entonces, como se ve en la figura 248, a, el resultado de observación depende del punto de observación.

Trazando líneas rectas desde el punto de observación a los bordes de la lente, se puede determinar la parte visible de la imagen real del filamento. De los puntos en el sector I (por ejemplo, del punto C) será visible toda la imagen del filamento; de los puntos en los sectores II y III, sólo la parte inferior o superior de la imagen; de los puntos dispuestos en el sector IV, sólo la parte media de la imagen; y de los puntos situados en los sectores V, la imagen del filamento no será visible del todo.

Si es tapada, por ejemplo, la mitad superior de la lente con la cortina opaca C (fig. 248, b), entonces al observarla incluso desde el punto C que se encuentra en el sector I la parte inferior de la imagen desaparece.

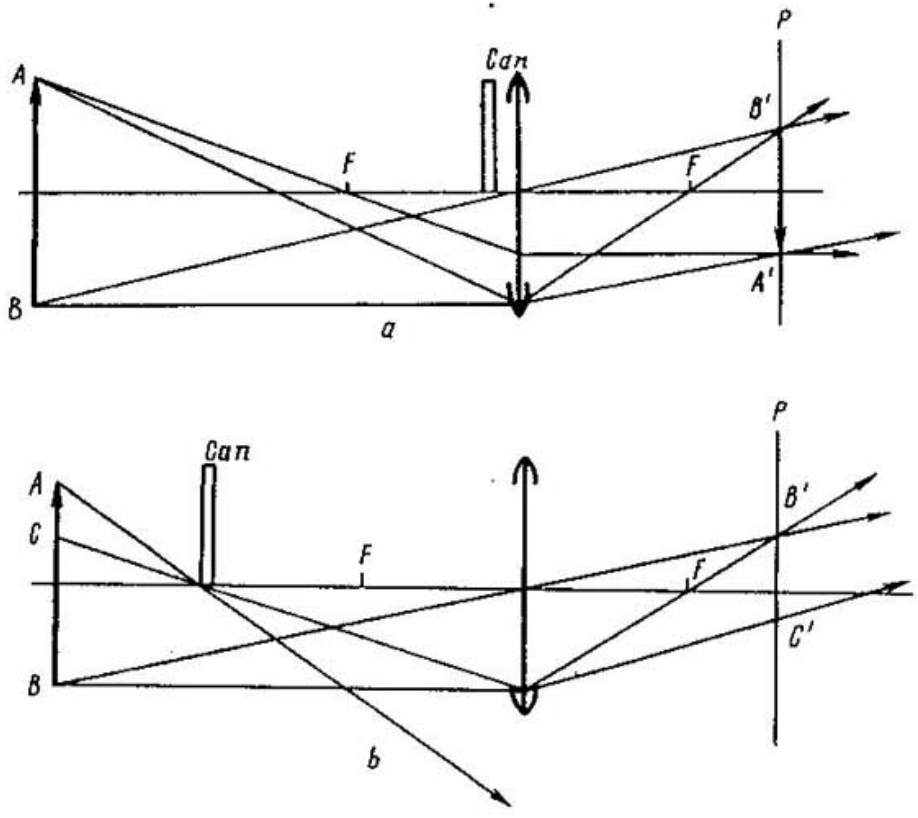


Fig. 247

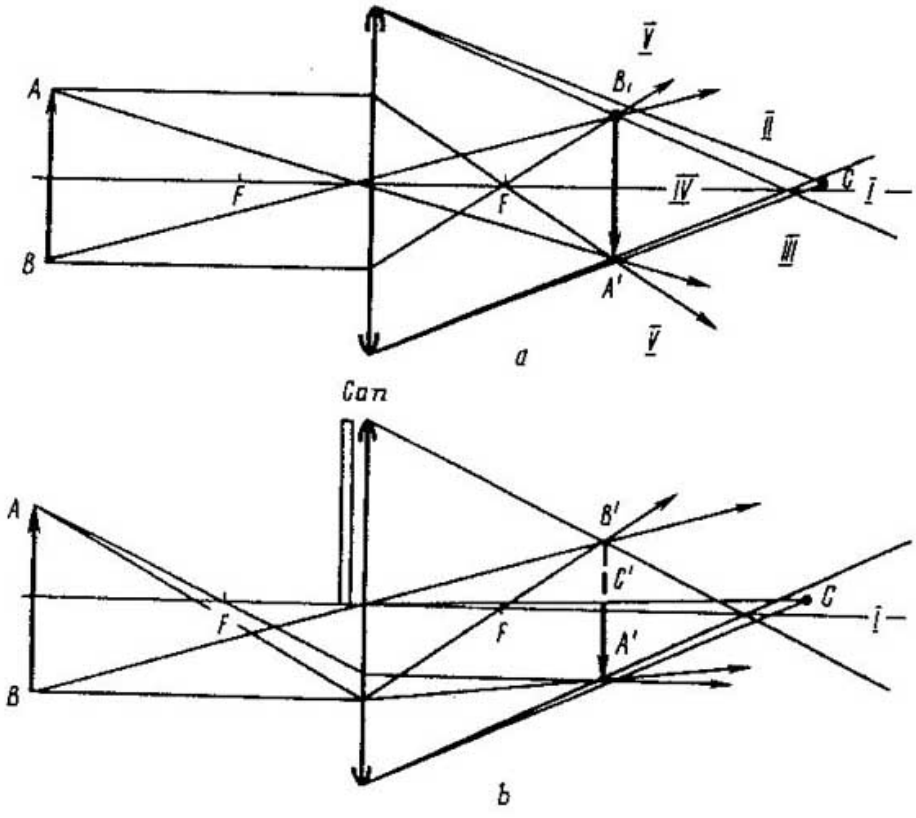


Fig. 248

Unos fenómenos más complejos se observan al obtener la imagen real de la flecha recortada del papel no transparente, a través de la lámpara. En este caso, al tapar con cortina no transparente una mitad de la lente, una parte de la imagen real de la "flecha" obtenida en la pantalla desaparece, lo que a primera vista parece contradecir al primer ensayo. Pero hay que tener en cuenta que la flecha no es un objeto autoluminoso, sino es solamente un orificio que deja pasar la luz procedente del filamento S_1S_2 de la lámpara de incandescencia.

Como se ve en la figura 249, a, la que ilustra el curso de los rayos para el caso, cuando el aumento es $0 > 3$, el solapar con cortina la mitad de la lente hace disminuir las dimensiones de la imagen: en lugar de la imagen $A'B'$ de toda la flecha AB se forma la imagen $C'B'$ de una parte de la flecha CB. La imagen del filamento con ello no cambia, de lo cual es fácil convencerse al acercar la pantalla a la lente.

En la figura 249, b se ilustra la trayectoria de los rayos para el caso $0 < 1/3$. En la figura se ve que las imágenes de la flecha y del filamento casi coinciden en espacio. En virtud de ello, al tapar con cortina la mitad de la

lente el efecto de disminución de las magnitudes de la imagen de la flecha es menos notable.

224. Tracemos los gráficos de dependencia entre la velocidad del cohete y el tiempo para el caso de ponerse en marcha uno de los motores (fig. 250). En los gráficos se ve que en el caso de la conexión consecutiva de los motores, la velocidad del cohete puede variar según el gráfico OAC o OBC. La altura, a la que sube el cohete para el momento final de funcionamiento de los motores, numéricamente es igual a la superficie de la figura dispuesta debajo del gráfico de dependencia entre la velocidad y el tiempo. En la figura se ve que en el primer caso (gráfico OAC) esta superficie y, consiguientemente, la altura de subida del cohete será mayor. Es igual a

$$h_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + a_1 t_1 t_2.$$

En el caso de la puesta en marcha simultánea de los motores las fuerzas y, quiere decir, las aceleraciones se suman. Entonces el gráfico de velocidad será la línea quebrada ODE y la altura h será igual a

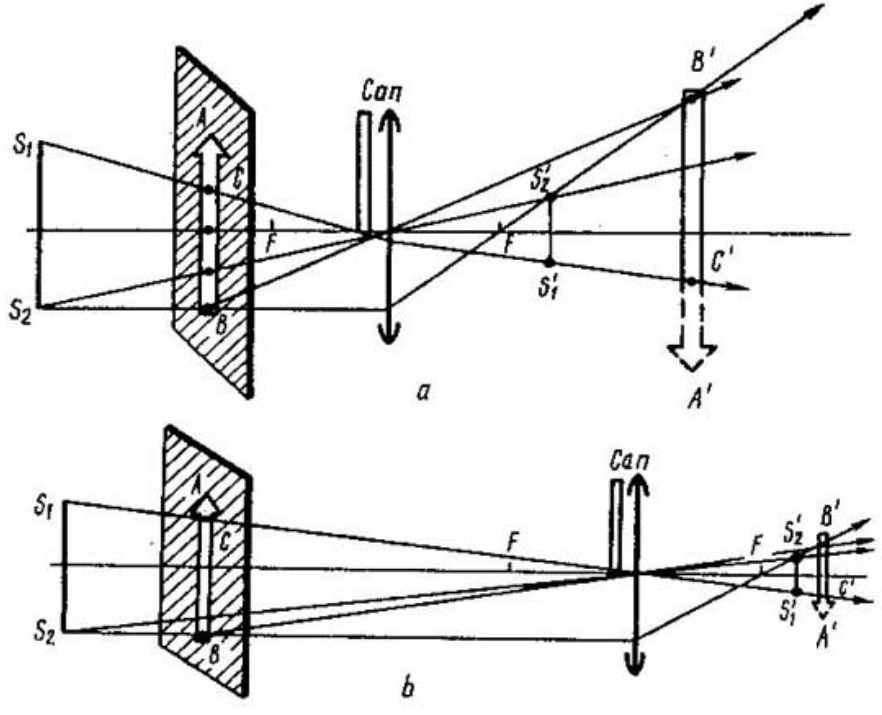


Fig. 249

$$h = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\, t_1^2 + (a_1 + a_2)\,(t_2 - t_1)\, t_1 + \frac{1}{2} a_2 (t_2 - t_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + (a_1 - a_2)\, t_1 t_2.$$

Es evidente que $h_1 > h$.

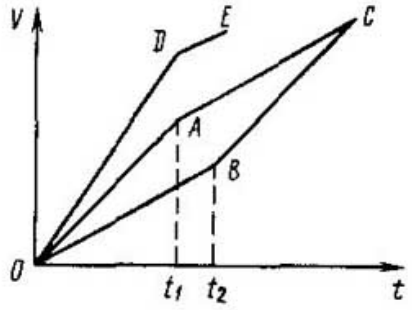


Fig. 250

Es fácil darse cuenta de que, al ponerse en marcha uno de los motores con el otro ya funcionando, la superficie debajo del gráfico de velocidad también será menor que h_1. De ello se desprende que si primero se pone en marcha el segundo motor, el gráfico va a hallarse entre las líneas quebradas OAC y OBC, y si antes se pone en marcha el primero, entonces entre las líneas quebradas ODE y OAC.

Por consiguiente, los motores deben ponerse en marcha por turno, conectándose primero el motor que comunica al cohete la aceleración mayor.

225. Ya que las fuerzas de atracción de la nave a la Tierra y la Luna en módulo son iguales entre sí, la aceleración centrípeda

$$a = \omega^2 R$$

debe ser conferida a la nave por el empuje del motor. Por consiguiente, el motor de la nave funciona.

Al cosmonauta esta misma aceleración se le cumunica por la fuerza $\vec{N}$ de reacción del "piso". Según la segunda ley de Newton esta fuerza es igual en módulo a

$$ma = m\omega^2 R,$$

en donde R es el radio de la órbita. Ya que el peso del cosmonauta es la fuerza con la que el mismo actúa sobre la nave, entonces con arreglo a la tercera ley de Newton el peso $\vec{P}$ del cosmonauta es igual a $\vec{N}$. Consiguientemente,

$$|\vec{P}| = m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R.$$

El radio de la órbita de la nave R puede ser hallada de la condición de igualdad (en módulo) de las fuerzas de su atracción a la Tierra y la Luna:

$$G\frac{M_T M_N}{R^2} = G\frac{M_L M_N}{(L-R)^2},$$

de ahí

$$R = \frac{L\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_T}+\sqrt{M_L}} = \frac{60R_T\sqrt{81M_L}}{\sqrt{81M_L}+\sqrt{M_L}} = 54\,R_T.$$

Por ello

$$|\vec{P}| = 54m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_T \approx 1{,}8\ \text{N}.$$

226. Designemos con R_1 y R_2 las resistencias de las partes en las cuales el cursor divide al potenciómetro (fig. 251). La tensión U en la carga es igual a IR_0 (en donde I es la intensidad de corriente en el circuito y R_0 la resistencia del tramo AB). Es evidente que

$$R_0 = \frac{RR_2}{R+R_2}, \qquad I = \frac{U_{ent}}{R_1+R_0}.$$

Ya que $R_1 = R - R_2$, entonces

$$U = \frac{U_{ent}}{R_1+R_0}\,\frac{RR_2}{R+R_2} = \frac{RR_2}{R^2-R_2^2+RR_2}\,U_{ent}.$$

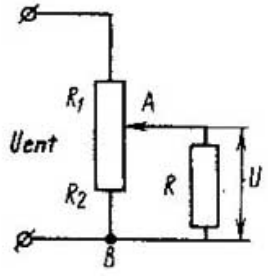


Fig. 251

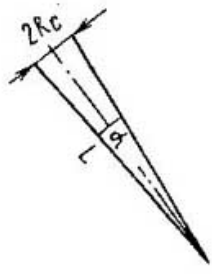


Fig. 252

Al dividir en esta fórmula el numerador y el denominador por R^2 obtendremos:

$$U_0 = U_{ent} \frac{\alpha}{1 - \alpha^2 + \alpha},$$

en donde $\alpha = R_2/R$. Primero $R_2 = R/2$, o sea $\alpha = 1/2$. Por ello

$$U_1 = U_{ent} \frac{1/2}{(1 - 1/4 + 1/2)} = \frac{2}{5} U \text{ (ent)}.$$

Al aumentar la tensión a la entrada del circuito dos veces, la tensión en la carga llega a ser igual a

$$U_2 = 2U_{ent} \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2^2 + \alpha^2},$$

en donde α_2 es el nuevo valor de la relación R_2/R.

Pero según datos del problema $U_2 = U_1$, o sea

$$\frac{2}{5} U_{ent} = 2U \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2^2 + \alpha^2}.$$

De aquí obtenemos la siguiente ecuación:

$$\alpha_2^2 + 4\alpha_2 - 1 = 0.$$

Al solucionarla hallaremos:

$$\alpha_2 = -2 \pm \sqrt{4 + 1} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Ya que según el sentido físico $\alpha_2 > 0$, entonces la raíz $-2 - \sqrt{5}$ debe ser omitida. Por consiguiente, $\alpha_2 = -2 + \sqrt{5}$ y hay que desplazar el cursor tanto que se cumpla la relación

$$R_2 = (\sqrt{5} - 2) R.$$

227. Durante el movimiento de la Tierra en torno del Sol sobre la Tierra actúa la fuerza gravitacional

$$F = G \frac{M_T M_S}{L^2}$$

en donde M_T es la masa de la Tierra, M_S, la masa del Sol, L, el radio de la órbita y T, el período de rotación de la Tierra alrededor del Sol. Esta fuerza comunica a la Tierra la aceleración centrípeda

$$a = \omega^2 L = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L.$$

Con arreglo a la segunda ley de Newton

$$G\frac{M_T M_S}{L^2} = M_T \frac{4\pi^2}{T^2} L.$$

Pero

$$G\frac{M_T}{R_T^2} = g.$$

Consiguientemente,

$$M_S g \frac{R_T^2}{L^2} = M_T \frac{4\pi^2}{T^2} L,$$

o

$$\frac{M_T}{M_S} = \frac{gR_T^2 T^2}{4\pi^2 L^3}. \qquad (2)$$

Tal que

$$M_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho_T \qquad \text{y} \qquad M_S = \frac{4}{3}\pi R_S^3 \rho_S,$$

entonces de la relación (2) se desprende que

$$\frac{\rho_T}{\rho_S} = \frac{gT^2 R_S^3}{4\pi^2 L^3 R_T}.$$

Pero ya según los datos del problema (fig. 252)

$$\frac{R_S}{L} = \frac{\alpha}{2},$$

entonces

$$\frac{\rho_T}{\rho_S} = \frac{g\alpha^3 T^2}{32\pi^2 R_T} \approx 4{,}4.$$

228. Hallándose en equilibrio el helicóptero la fuerza de gravedad es equilibrada por la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre el helicóptero de parte del aire arrojado por las palas:

$$\vec{F} = -m\vec{g}.$$

Según la tercera ley de Newton la fuerza $\vec{F}$ es igual en módulo a la fuerza $\vec{F}_1$ que actúa sobre el aire. Si las palas del helicóptero en una unidad de tiempo (1 s) lanzan la masa del aire μ con la velocidad $\vec{v}$, entonces

$$\vec{F}_1 = \mu\vec{v}$$

y, consiguientemente,

$$m\vec{g} = \mu\vec{v}.$$

Si la densidad del aire es igual a ρ, entonces

$$\mu = \rho Sv = \rho\pi l^2 v,$$

en donde S es la superficie de la sección del flujo del aire "arrojado". Por ello

$$mg = \rho\pi l^2 v^2. \qquad (1)$$

La potencia del motor es igual a la energía cinética que adquiere el aire lanzado en una unidad de tiempo:

$$N = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{mgv}{2}. \qquad (2)$$

De la igualdad (1) se desprende que

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\rho\pi l^2}}.$$

Por consiguiente,

$$N = \frac{mg}{2l}\sqrt{\frac{mg}{\rho\pi}}.$$

La densidad ρ del aire puede ser hallada de la ecuación del estado gaseoso

$$\rho = \frac{pM}{RT},$$

en donde M es la masa molar. Por ello

$$N = \frac{mg}{2l}\sqrt{\frac{mgRT}{\rho pM}}.$$

Adoptando que $T = 300$ K, $p = 10^5$ N/m^2, $M = 29 \cdot 10^{-3}$ kg/mol obtenemos:

$$N \approx 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ W} = 15 \text{ kW}.$$

229. Con arreglo a la primera ley de termodinámica la cantidad de calor Q transferida al gas es igual a la suma de variación de la energía interna del gas ΔU con el trabajo A realizado por el gas:

$$Q_I = \Delta U_I + A_I, \qquad Q_{II} = \Delta U_{II} + A_{II}.$$

Aquí el índice I pertenece al proceso $1 \to 3 \to 2$, mientras que el índice II, al proceso $1 \to 4 \to 2$. Ya que el gas es monoatómico, entonces para un mol

$$U = \frac{3}{2}RT \qquad \text{y } \Delta U = \frac{3}{2}R \cdot \Delta T.$$

Por consiguiente,

$$\Delta U_I = \Delta U_{II} = \Delta U = \frac{3}{2}R \cdot (T_2 - T_1).$$

La diferencia de temperaturas $T_2 - T_1$ puede ser hallada de la ecuación de Mendeleyev – Clapeyron anotada para los estados 1 y 2:

$$p_0 V_0 = RT_1, \qquad 2p_0 \cdot 2V_0 = RT_2, \; T_2 - T_1 = \frac{3p_0 V_0}{R}.$$

Por ello

$$\Delta U = \frac{9}{2}p_0 V_0.$$

Ahora hallemos los valores del trabajo de gas A_I y A_{II}. En el caso I el trabajo se realiza sólo con el paso $3 \to 2$. Por ello

$$A_I = p \cdot \Delta V = 2p_0 (2V_0 - V_0) = 2p_0 V_0.$$

En el caso II el trabajo se realiza sólo con el paso $1 \to 4$ y, consiguientemente,

$$A_2 = p_0 (2V_0 - V_0) = p_0 V_0.$$

De este modo

$$Q_I = \Delta U + A_I = \frac{13}{2} p_0 V_0, \qquad Q_{II} = \Delta U + A_{II} = \frac{11}{2} p_0 V_0;$$

$$\frac{Q_I}{Q_{II}} = \frac{13}{11}.$$

230. Al variar el campo magnético surge el campo eléctrico rotacional cuya intensidad en cada punto del anillo está dirigida por la tangente al mismo. Sobre las cargas del anillo en este campo actúan las fuerzas merced a las cuales el anillo se pone en movimiento. La variación de la energía cinética del anillo en el tiempo Δt es igual al trabajo realizado por estas fuerzas. Si la velocidad del anillo es igual a ω, entonces en el tiempo Δt éste gira al ángulo $\varphi = \omega \cdot \Delta t$. Con tal giro por el circuito pasa la carga q de la que dispone el tramo de largo φR. Ya que la carga de una unidad de longitud del anillo es igual a $\frac{Q}{2\pi R}$, entonces

$$q = \frac{Q}{2\pi R} \varphi R = \frac{Q\varphi}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi} \omega \cdot \Delta t.$$

El trabajo realizado durante el giro del anillo es igual a la FEM de inducción que se excita en el circuito, limitado por el anillo, y multiplicada por la carga q:

$$A = |\mathcal{E}|\, q = \left|\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}\right| q = \left|\frac{\pi R^2 \cdot \Delta B}{\Delta t}\right| \frac{Q}{2\pi} \omega \cdot \Delta t = \frac{R^2 \omega Q \cdot \Delta B}{2}.$$

La energía cinética del anillo en este mismo tiempo varía en la magnitud

$$\Delta W_c = \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} \approx mv \cdot \Delta v = m\omega R \cdot \Delta (\omega R) = m\omega R^2 \cdot \Delta \omega.$$

Igualando a ΔW_c con A obtenemos:

$$m\omega R^2 \cdot \Delta \omega = \frac{R^2 Q \omega \cdot \Delta B}{2},$$

o

$$\Delta \omega = \frac{Q \Delta B}{2m}.$$

De este modo, la variación de la velocidad angular $\Delta\omega$ es directamente proporcional a la variación de la inducción magnética ΔB. Para el momento, cuando la inducción del campo magnético alcance el valor de B_0, la velocidad angular del anillo será igual a

$$\omega = \frac{QB_0}{2m}.$$

231. Si la resistencia del resistor es grande, la intensidad de corriente, que fluye por el mismo, es pequeña y la diferencia de potenciales entre los puntos B y A (ver la fig. 71) es próxima a $2\mathcal{E}$. Con ello el potencial del punto B es superior al potencial del punto C equivalente a $\mathcal{E}$, si el potencial del punto A se toma igual a cero. Por consiguiente, el diodo se halla cerrado y la corriente no fluye por la rama con el diodo. Entonces se puede prescindir de la presencia de la rama con el diodo y considerar el esquema simplificado ofrecido en el figura 253, a. En este circuito fluye la corriente

$$I = \frac{2\mathcal{E}}{2r + R}.$$

Por ello la tensión en la resistencia R es igual a

$$U_R = \frac{2\mathcal{E}R}{2r + R}.$$

A medida que disminuye la resistencia R del resistor crece la corriente en el circuito, aumenta la caída de la tensión en las resistencias internas de los manantiales, mientras que la diferencia de potenciales entre los puntos B y A disminuye. Ocurrirá así hasta que el potencial del punto B llegue a ser igual al potencial del punto C, o sea en tanto que el diodo permanece cerrado. El diodo se abrirá en el momento, cuando la tensión entre los puntos B y C llegue a ser igual a cero; esto tendrá lugar, cuando la tensión entre los puntos B y A llegue a ser igual a $\mathcal{E}$. En este momento la tensión en el resistor R es igual a $\mathcal{E}$.

$$\frac{2\mathcal{E}R}{2r + R} = \mathcal{E},$$

De aquí

$$R = 2r.$$

Ahora hallemos la tensión en el resistor R, cuando su resistencia $R << 2r$. En este caso la resistencia del diodo es igual a cero y el esquema simplificado adopta el aspecto ilustrado en la figura 253, b.

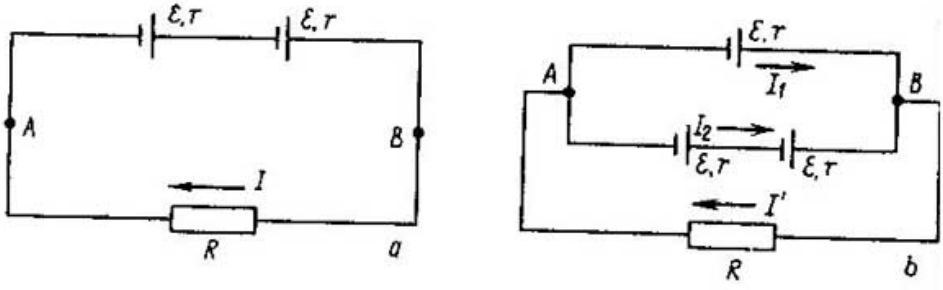


Fig. 253

En este caso

$$U'_R = I'R = \mathcal{E} - I_1 r = 2\mathcal{E} - I_2 \cdot 2r, \qquad I' = I_1 + I_2.$$

De aquí

$$I' = \frac{4\mathcal{E}}{2r + 3R}, \quad U'_R = \frac{4\mathcal{E}R}{2r + 3R}.$$

De este modo,

$$U_R = \frac{2\mathcal{E}R}{2r + R} \quad \text{con} \quad R \geqslant 2r,$$

$$U_R = \frac{4\mathcal{E}R}{2r + 3R} \quad \text{con} \quad R \leqslant 2r.$$

232. El gallardete lanzado de la nave debe moverse por una órbita elíptica que toca la superficie de la Luna (fig. 254). El eje mayor de esta órbita es igual a $R + R_L$ (en donde R_L es el radio de la Luna).

La fuerza gravitacional entre el gallardete y la Luna es análoga a la fuerza de interacción de dos cargas eléctricas puntuales de signos opuestos. Por ello la expresión para la energía potencial en los puntos A y B (apogeo y perigeo) puede ser anotada por analogía con la energía de interacción de las cargas:

$$W_A = -G\frac{M_L m}{R}, \; W_B = -G\frac{M_L m}{R_L},$$

en donde M_L es la masa de la Luna y m, la masa del gallardete.

Según la ley de conservación de la energía

$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{M_L m}{R} = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{M_L m}{R_L},$$

en donde $\vec{v}_2$ es la velocidad del gallardete en el punto B y $\vec{v}_1$, la velocidad del mismo en el punto A.

Al reducir la igualdad citada en m y teniendo en cuenta que

$$G\frac{M_L}{R_L^2}=g_L,$$

obtendremos:

$$\frac{v_1^2}{2}-g_L\frac{R_L^2}{R}=\frac{v_2^2}{2}-g_L R_L. \qquad (1)$$

De la segunda ley de Kepler se puede obtener una relación más entre las velocidades v_1 y v_2. Con arreglo a esta ley el radio-vector del planeta describe iguales áreas en iguales plazos de tiempo.
Por ello

$$\frac{v_1\cdot\Delta t\cdot R}{2}=\frac{v_2\cdot\Delta t\cdot R_L}{2}, \quad \text{o} \quad v_1R=v_2R_L \qquad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2), teniendo en cuenta que $R = 2R_L$, hallamos

$$v_1=R_L\sqrt{\frac{2g_LR_L}{R(R_L+R)}}=\sqrt{\frac{g_LR_L}{3}}.$$

Para determinar la velocidad con la que es preciso lanzar el gallardete respecto a la nave, hace falta hallar la velocidad de la nave en su órbita circular. Puesto que la nave gira por la circunferencia y en la misma actúa sólo la fuerza gravitacional, entonces

$$G\frac{M_L m_1}{R^2}=\frac{m_1 v_0^2}{R},$$

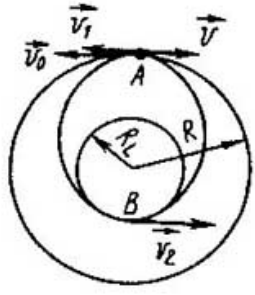


Fig. 254

en donde m_1 es la masa de la nave. De aquí

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_L}{R}} = \sqrt{\frac{g_L R_L}{2}}.$$

Es evidente que $v_1 < v_0$. Consiguientemente,

$$v = v_0 - v_1 = \sqrt{g_L R_L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 200 \text{ m/s}.$$

Con tal velocidad es preciso lanzar el gallardete hacia atrás para que caiga sobre el lado opuesto de la Luna.

Para hallar el tiempo de caída del gallardete hagamos uso de la tercera ley de Kepler, con arreglo a la cual los cuadrados de los períodos de rotación de planetas se relacionan como cubos de los semiejes mayores de sus órbitas. El período T_0 de rotación de la nave (o del gallardete) por la órbita circular de radio R se determina como sigue:

$$T_0 = \frac{2\pi R}{v_0} = 4\pi \sqrt{\frac{2R_L}{g_L}}.$$

Conociendo T_0 se puede determinar el período T de rotación del gallardete por la órbita elíptica que toca la superficie de la Luna a base de la tercera ley de Kepler:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{R + R_L}{2R_L}\right)^3,$$

de donde

$$T = T_0 \left(\frac{R + R_L}{2R_L}\right)^{3/2} = \frac{3}{8}\sqrt{3T_0} \approx 11{,}8 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 200 \text{ min}.$$

233. Moviéndose por la trayectoria parabólica la nave cósmica tiene en el punto más próximo de la Luna tal energía cinética que le permite alejarse a continuación a la "infinidad" de la Luna. A la distancia infinitamente grande de la Luna la energía cinética de la nave es igual a cero. Se puede tomar equivalente a cero asimismo la energía potencial de la nave. Esto significa que a la distancia infinitamente grande de la Luna la energía mecánica total de la nave será igual a cero. De la ley de conservación de la energía se desprende que asimismo en el punto más próximo a la Luna la energía mecánica total de la nave también debe ser igual a cero; por consiguiente[1],

[1] Véase la solución del problema 232.

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{M_L M}{R_L} = 0,$$

de donde

$$v = \sqrt{2G\frac{M_L}{R_L}}.$$

Ya que

$$\frac{GM_L}{R_L^2} = g_L,$$

entonces

$$v_0 = \sqrt{g_L R_L} \approx 2{,}4 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

En el curso del frenado la velocidad de la nave debe decrecer hasta la primera velocidad cósmica v_1 de movimiento por la órbita circular de radio R_L. Ya que durante el movimiento por la órbita circular de radio R_L la aceleración centrípeda

$$a = \frac{v^2}{R_L}$$

es comunicada a la nave por la fuerza gravitacional

$$F = mg_L,$$

entonces

$$\frac{mv_1^2}{R_L} = g_L m,$$

de donde

$$v_1 = \sqrt{g_L R_L} \approx 1{,}7 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

Por consiguiente,

$$\Delta v = v_0 - v_1 \approx 0{,}7 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Para apreciar la masa Δm del propergol quemado supongamos que el tiempo de combustión del mismo es muy breve y que los productos de

combustión han sido expulsados de una porción. Según la ley de conservación del impulso

$$(m - \Delta m)\,\Delta v = \Delta m \cdot v,$$

de donde

$$\Delta m = \frac{\Delta v}{v + \Delta v} \cdot m \approx 0{,}15\,m.$$

234. Para que todo el flujo luminoso salga por la faceta $A'B'$ del segundo prisma, él debe salir del primer prisma a través de la faceta CD perpendicularmente a la faceta DE y dar en la faceta CD paralelamente a la faceta BC (fig. 255). Con ello, como se ve en la figura, $\beta = 30°$ y $\alpha = 60°$. Por consiguiente,

$$n = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \sqrt{3}.$$

235. Al ser acoplado al manantial el condensador se carga hasta la tensión U y sus placas adquieren las cargas +q y -q iguales en módulo a

$$q = CU = \frac{\varepsilon_0 SU}{l_0}.$$

La placa cargada superior del condensador resulta con ello en el campo de la carga de la placa inferior y sobre la misma actúa la fuerza

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

en donde $\vec{E}$ es la intensidad del campo de la carga de la placa inferior. Ya que en el condensador plano las dimensiones lineales de las placas son mucho mayores que las distancias entre las mismas, se puede considerar que este campo coincide con el campo del plano infinito uniformemente

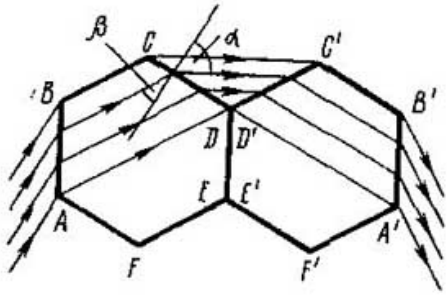


Fig. 255

cargado. La intensidad de tal campo no depende de la distancia hasta el plano y es igual en módulo a

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{u}{2l_0},$$

en donde σ es la densidad de la carga.

Accionada por la fuerza $\vec{F}$, la placa superior se pone en movimiento extendiendo el muelle. Esta fuerza, igual que la fuerza de gravedad, no depende de la posición de la placa. Y la fuerza de elasticidad $\vec{F}_{elas}$ del muelle en módulo es proporcional al corrimiento. Por ello la placa va a ejecutar oscilaciones armónicas a proximidad de la posición de equilibrio en la cual

$$F + mg = F_{elas}, \qquad (1)$$

en donde m es la masa de la placa. La amplitud de oscilaciones de la placa será igual a la distancia h entre su posición inicial y la posición de iquilibrio. Por consiguiente, las placas no van a tocar una a otra si esta distancia h es menor que la mitad de la distancia inicial l_0 entre las placas (con el condensador no cargado).

Designemos con Δx_0 la deformación del muelle en la posición inicial. Su deformación en la nueva posición de equilibrio es igual a $\Delta x_0 + h$. En esta posición la fuerza de elasticidad del muelle en módulo es igual a

$$F_{elas} = k(\Delta x_0 + h).$$

Ya que en ausencia de cargas en las placas del condensador su placa superior se hallaba en equilibrio, entonces

$$mg = k \cdot \Delta x_0.$$

Al sustituir las expresiones para F_{elas} y mg en la fórmula (1), obtendremos:

$$F + k \cdot \Delta x_0 = k(\Delta x_0 + h),$$

de donde

$$h = \frac{F}{k}.$$

De esta forma, las placas no se tocan si

$$\frac{F}{k} < \frac{1}{2} l_0,$$

o sea con

$$k > \frac{2E}{l_0} = \frac{2qE}{l_0} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{l_0^3}.$$

236. En el caso del golpe en el balón actúa la fuerza de reacción $\vec{N}$ del lado de la pared y la fuerza de presión atmosférica $\vec{F}_a$.

Con arreglo a la tercera ley de Newton la fuerza $\vec{N}$ es igual en módulo a la fuerza de presión $\vec{F}_p$ del balón sobre la pared. Ya que la elasticidad de la cubierta no se toma en consideración, entonces

$$N = F_p = pS = p\pi r^2,$$

en donde $S = \pi r^2$ es la superficie de contacto del balón con la pared. La fuerza $\vec{N}$ está orientada perpendicularmente a la pared, o sea por la horizontal a la derecha (ver la fig. 74).

Para hallar la fuerza de presión atmosférica repartamos la superficie del balón en pequeños sectores de superficie ΔS_i. En cada sector actúa la fuerza de presión atmosférica $\vec{F}_i$ (fig. 256) dirigida perpendicularmente a la superficie e igual en módulo a

$$F_i = p_0 \cdot \Delta S_i,$$

en donde p_0 es la presión atmosférica. Por razones de simetría se puede afirmar que la suma de proyecciones de todas las fuerzas $\vec{F}_i$ sobre la dirección vertical es igual a cero. Por ello la resultante $\vec{F}_a = \Sigma \vec{F}_i$ está dirigida horizontalmente y es igual en módulo a

$$F_a = \Sigma F_i \quad \cos\alpha = p_0 \Sigma \Delta S_i \cdot \cos\alpha.$$

Pero $\Delta S_i \cdot \cos\alpha$ es la superficie de la proyección del sector i sobre el plano vertical, mientras que $\Sigma \Delta S_i \cdot \cos\alpha$ es la suma de superficies de tales proyecciones igual a la superficie de proyección de la superficie del balón:

$$\Sigma \Delta S_i \cdot \cos\alpha = \pi r^2.$$

Por consiguiente,

$$F_a = p_0 \pi r^2.$$

Hallemos ahora el módulo de la resultante $\vec{F}$ de las fuerzas $\vec{N}$ y $\vec{F}_a$:

$$|\vec{F}| = |\vec{N}| - |\vec{F}_0| = (p - p_0) \cdot \pi r^2 = (p - p_0)\,\pi\,[R^2 - (R - x)^2] = (p - p_0)\,\pi \quad \text{x}$$

$$\text{x} \quad (2Rx - x^2).$$

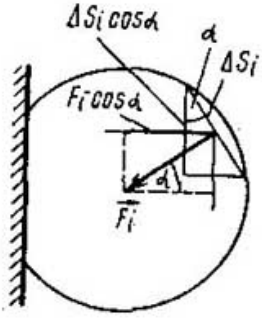


Fig. 256

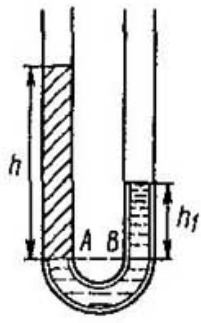


Fig. 257

Ya que la deformación x del balón es pequeña en comparación con su radio, entonces de la magnitud x^2 se puede prescindir en comparación con la magnitud 2Rx. Por ello

$$|\vec{F}| \approx 2\pi Rx\,(p - p_0).$$

Ya que la fuerza $\vec{F}$ está dirigida en el sentido opuesto a la deformación, se puede anotar:

$$F = -kx,$$

en donde $k = 2\pi R\,(p - p_0)$. De este modo, el módulo de la fuerza $\vec{F}$ es proporcional a la deformación x. Accionado por tal fuerza el cuerpo ejecuta oscilaciones con el período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

en donde m es la masa del cuerpo.

Es evidente que el tiempo τ de colisión del balón con la pared es igual a la mitad del período de oscilaciones:

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 8 \cdot 10^{-3}\ \text{s}.$$

237. La densidad del aceite y de la disolución de caparrosa azul puede ser determinada de la forma siguiente. En los vasos comunicantes primero se echa aceite y agua (fig. 257). Según la ley de Pascal las presiones en los puntos A y B son iguales a:

$$p_A = p_B.$$

Al expresar las presiones p_A y p_B mediante las densidades de líquidos ρ_1 y ρ_2 y sus alturas h_1 y h_2, obtendremos:

$$p_A = \rho_1 g h_1, \; p_B = \rho_2 g h_2.$$

Por ello

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2,$$

de donde

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 h_1}{h_2}.$$

El método descrito de ejecución del trabajo es conveniente sólo para los líquidos inmiscibles. No se puede comparar de esta manera las densidades del agua y de la caparrosa azul. Para determinar la densidad de la disolución de la caparrosa azul en los vasos comunicantes se vierte el aceite y la disolución de la caparrosa azul.

Otro método de medición de la densidad de los líquidos puede fundarse en el análisis de la condición de equilibrio del cuerpo que tiene el eje de rotación. Hacer las veces de tal cuerpo puede una regla colocada sobre un lápiz. Sobre la regla hay que disponer de un lado un vaso vacío y del otro lado, un vaso igual con masa conocida m_1 del agua (fig. 258).

Aplicando la regla de momentos de las fuerzas obtendremos:

$$mgl_1 = (m - m_1) gl_2,$$

de donde

$$m = \frac{m_1 l_2}{l_1 - l_2},$$

en donde m es la masa del vaso, l_1 y l_2, los brazos de las fuerzas de gravedad de los vasos.

Seguidamente se equilibran los vasos con iguales volúmenes V del agua y del aceite y nuevamente se aplica la regla de momentos de las fuerzas:

$$(m + \rho_1 V) gl'_1 = (m + \rho_2 V) gl'_2,$$

de donde

$$\rho_2 = \frac{m (l'_1 - l_2') + \rho_1 V}{V l'_2}$$

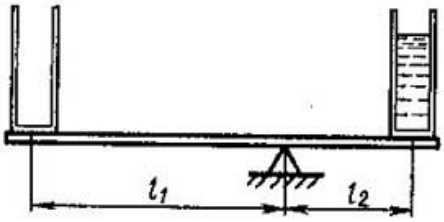


Fig. 258

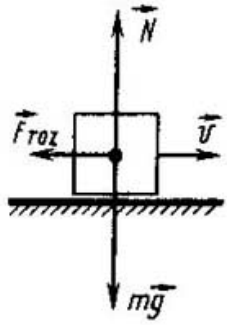


Fig. 259

Se puede no medir la masa del vaso si los vasos se equilibran con líquidos en una palanca de brazos iguales. Para ello hay que echar diferentes cantidades de líquidos determinadas por las alturas h_1 y h_2. Aplicando la regla de momestos de las fuerzas:

$$\rho_1 S h_1 g = \rho_2 S h_2 g,$$

obtenemos:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 h_1}{h_2}.$$

La precisión puede ser elevada si primero se determina la densidad de la caparrosa azul con relación a la densidad del agua y luego la densidad del aceite respecto a la densidad de la caparrosa azul.

238. Con ayuda de la catapulta se lanza la barra por la superficie horizontal de una tabla y se determina la distancia máxima s_m (de la serie de 10 a 15 lanzamientos) de movimiento de la barra (fig. 259). Por la segunda ley de Newton

$$\mu mg = ma,$$

o

$$a = \mu g,$$

de donde

$$v_m = \sqrt{2as}_m = \sqrt{2\mu g s}_m.$$

El coeficiente de rozamiento μ puede ser determinado con facilidad mediante un ensayo aparte según la tangente del ángulo de inclinación

α, con el cual empieza el resbalamiento uniforme de la barra por la tabla:

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

En una serie de instalaciones con la desviación máxima de la catapulta barra se desplazaba a una distancia mayor que la longitud de la tabla. En este caso para medir la velocidad máxima de la barra hay que empujarla hacia arriba por el plano inclinado con el ángulo de inclinación α. Midiendo el camino s_m recorrido por la barra hacia arriba por el plano inclinado se puede determinar la velocidad de la barra v_m. Ya que

$$mg(\operatorname{sen}\alpha + \mu \cos\alpha) = ma,$$

entonces

$$v_m = \sqrt{2as_m} = \sqrt{2g(\operatorname{sen}\alpha + \mu \cos\alpha)s_m}.$$

239. Para medir con precisión la resistencia del resistor hay que determinar la resistencia interna del voltímetro. Primero se mide la FEM del manantial de corriente acoplando el voltímetro a los bornes de éste (según los datos del problema la resistencia interna del manantial de corriente es mucho menor que la resistencia del voltímetro). Seguidamente se monta el circuito eléctrico según el esquema ofrecido en la figura 260. Al aplicar la ley de Ohm a este circuito, obtendremos:

$$U = IR_v = \frac{\mathcal{E} R_v}{R + R_v},$$

de donde

$$R_v = \frac{UR}{\mathcal{E} - U}.$$

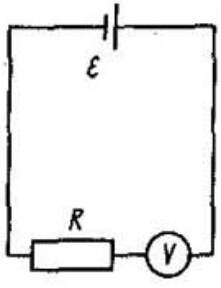


Fig. 260

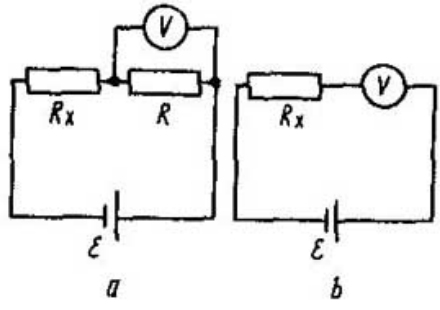


Fig. 261

Conociendo la resistencia interna R_v del voltímetro se puede determinar la resistencia R_x del resistor montando el circuito con arreglo al esquema ofrecido en la figura 261, a o en la figura 261, b.

En el primer caso se puede anotar

$$\frac{U_1}{\mathcal{E} - U_1} = \frac{\dfrac{R_v R}{R + R_v}}{R_x},$$

de donde

$$R_x = \frac{(\mathcal{E} - U_1) R R_v}{U_1 (R + R_v)}$$

En el segundo caso la aplicación de la ley de Ohm se reduce a la expresión

$$U_2 = IR_v = \frac{\mathcal{E} R_v}{R_x + R_v},$$

de donde

$$R_x = \frac{R_v (\mathcal{E} - U_2)}{U_2}.$$

Valiéndose del reóstato previsto en el equipo, para solucionar el problema se puede emplear el circuito de puente (fig. 262). Si se cumple la relación

$$\frac{R}{R_x} = \frac{R_a}{R_v},$$

el voltímetro, al cerrarse el circuito, no acusa ningunas indicaciones. De aquí

$$R_x = \frac{R_v}{R_a} R = \frac{b}{a} R,$$

en donde a y b son las dimensiones lineales de las partes del reóstato hasta el contacto deslizante.

240. La comprobación de la "caja negra" comienza con la detección en la misma de la FEM con ayuda del voltímetro. Al cerciorarse de que la FEM no se detecta se monta el circuito según el esquema reproducido

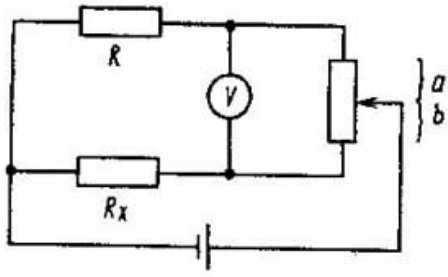


Fig. 262

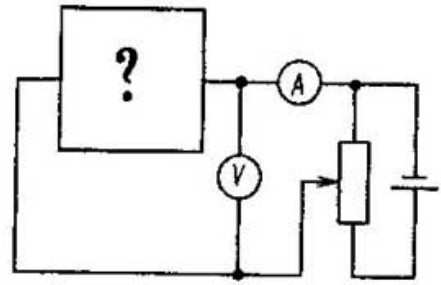


Fig. 263

en la figura 263 y se estudia la dependencia entre la intensidad de corriente, que fluye por los elementos de la caja, y la tensión con distinta polaridad de acoplamiento del manantial de corriente. Según los resultados de mediciones se construye la característica de voltios-amperios de la caja (fig. 264). Analizando la característica de voltios-amperios se puede resumir que en la caja se hallan un diodo y un resistor acoplados en serie o un diodo de resistencia directa R = 20 Ohms.

El tramo no lineal en el extremo de la característica evidencia sobre el crecimiento de la resistencia con corrientes grandes. Esto es posible si el resistor posee una dependencia de la temperatura fuertemente expresada o si la temperatura del resistor se eleva bruscamente con el aumento de la intensidad de corriente, o sea si el resistor es una lámpara de incandescencia.

La precisión de la medición de la intensidad de corriente y de la tensión puede ser elevada si se toma en consideración la resistencia interna de los instrumentos que pueden determinarse en ensayos aparte.

241. Primero se determinan las distancias focales de todas las tres lentes. Las distancias focales F_1 y F_2 de dos lentes convergentes se determinan obteniendo en la pantalla la imagen de la vela ardiente y aplicando la fórmula de la lente. Para realizar dicho trabajo las distancias focales de dos lentes convergentes deben ser diferentes ($F_1 > F_2$).

Para determinar la distancia focal F_3 de la lente divergente se procede de la manera siguiente. Primero se obtiene en la pantalla la imagen real S' de la vela S con ayuda de la lente convergente. Luego entre la lente y la pantalla se dispone la lente divergente. Apartando la pantalla se logra que en la misma vuelva a formarse la imagen nítida S'' de la llama de la vela (fig. 265). Valiéndose de la reversibilidad de la marcha de los rayos se puede creer que el punto S' es la imagen virtual del punto S''; esta imagen se forma como resultado de refracción de los rayos en la lente divergente. Al medir las distancias d y f se determina F_3:

$$\frac{1}{F_3} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f},$$

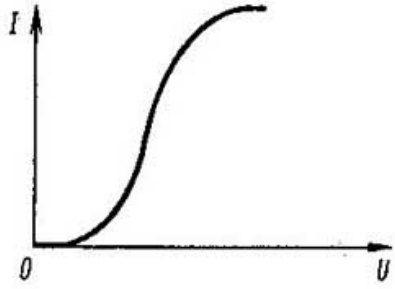


Fig. 264

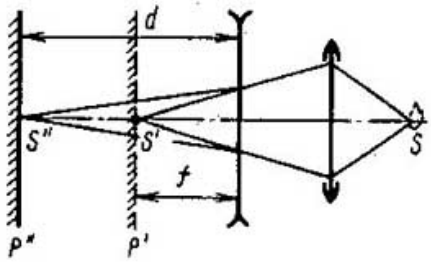


Fig. 265

de donde

$$F_3 = \frac{fd}{f - d}.$$

Con ayuda de dichos tres lentes se puede armar los modelos del tubo de Kepler (fig. 266), del tubo de Galilei (fig. 267) y del microscopio (fig. 268). En el caso del tubo de Kepler los planos focales de ambas lentes coinciden. Del objetivo sirve una lente de foco largo y del ocular, una de foco corto. El aumento de tal tubo se determina por la fórmula

$$O = \frac{F_1}{F_2},$$

en donde F_1 es la distancia focal del objetivo; F_2, la distancia focal del ocular. Experimentalmente el aumento puede determinarse examinando una regla: con un ojo directamente y con el otro, la imagen de la regla obtenida con ayuda del tubo. La relación entre el tamaño lineal de la imagen y el tamaño del objeto es justamente el aumento del tubo.

Para el tubo de Galilei se usa una lente convergente (objetivo) y una lente divergente (ocular) (fig. 267). El aumento de este tubo se determina por la fórmula

$$O = \frac{F_1}{F_3},$$

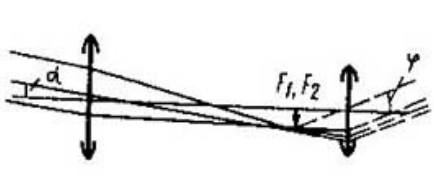


Fig. 266

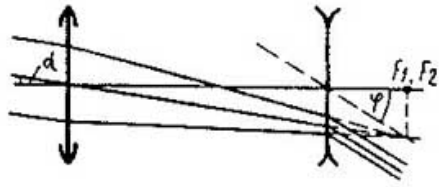


Fig. 267

en donde F_1 es la distancia focal del objetivo; F_3, la distancia focal del ocular. La distancia l que media entre las lentes en el tubo de Galilei también es igual a la suma de las magnitudes absolutas de las distancias focales de ambas lentes ($l = F_1 + F_3$).

Exptrimentalmente el aumento del tubo de Galilei se determina por el mismo método que el aumento del tubo de Kepler.

El microscopio se compone de dos lentes convergentes (ver la fig. 268). Con ello la lente de menor distancia focal (F_2) sirve de objetivo. La distancia que media entre las lentes l es mayor que la suma $F_1 + F_2$; se selecciona por vía de prueba obteniendo la nitidez máxima. El aumento del microscopio se determina por la fórmula

$$O \approx \frac{\delta (l - F_1)}{F_1 F_2}$$

en donde δ es la distancia de la visión óptima.

242. Para determinar el poder resolutivo α del ojo hace falta medir la distancia l desde la cual todavía se puede distinguir dos rayas adyacentes de la regla con el valor de una división δ y a continuación calcular el ángulo mínimo correspondiente de vista φ por la fórmula

$$\varphi = \frac{\delta}{l} 3420'.$$

Al diafragmar el ojo, o sea examinar las rayas de la regla a través de la pantalla provista de un orificio, la distancia l disminuye, o sea aumenta el ángulo φ, siendo tanto más notable cuanto menor es el diámetro d del orificio. Con d > 2 mm el poder resolutivo no varía. Esto se explica por el

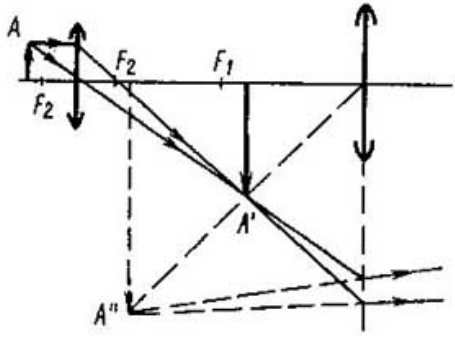


Fig. 268

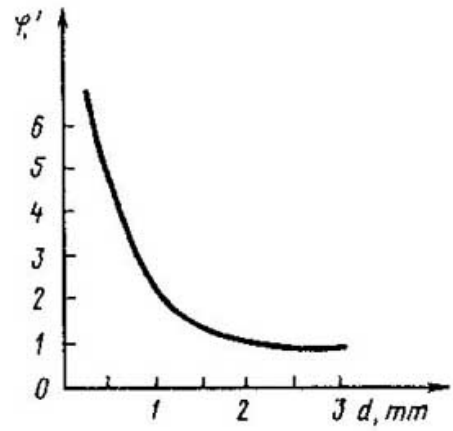


Fig. 269

hecho de que el diámetro de la pupila es aproximadamente igual a 2 mm. La disminución del poder resolutivo del ojo, en caso de diafragmarlo, está relacionada con la difracción de la luz en el orifico, a efecto de la cual el poder resolutivo se reduce hasta el valor

$$\varphi = k\frac{\lambda}{d},$$

en donde λ es la longitud de la onda; d, el diámetro del orificio; k, el coeficiente dependiente de la forma del orificio. Para los orificios redondos $k = 1{,}22$. Los resultados de mediciones por esta fórmula se concuerdan bien con el gráfico de dependencia, obtenido experimentalmente, entre el poder resolutivo y el diámetro del orificio ilustrado en la figura 269.

243. Tracemos los gráficos de dependencia entre las coordenadas de los trenes y el tiempo. Por el origen de la lectura tomemos el punto en el cual comenzó el frenado del tren de pasajeros y por la dirección del eje de coordenadas se toma la dirección de velocidades de los trenes. El momento inicial de frenado se toma por el principio del cronometraje del tiempo. En tal sistema de lectura las coordenadas de los trenes en el momento de tiempo t se expresan como sigue:

$$x_{pas} = v_1 t + \frac{at^2}{2}, \qquad x_{mer} = v_2 t + s_0,$$

en donde $v_1 = 108$ km/h $= 30$ m/s, $v_2 = 32{,}4$ km/h $= 9$ m/s.

En los gráficos (fig. 270) se ve que en los momentos de tiempo t' y t'' las coordenadas de ambos trenes son iguales entre sí. Esto significa que en el momento $t = t'$ se producirá el choque de los trenes. De la condición $x_{pas} = x_{mer}$ hallamos los valores $t' = 15$ s, $t'' = 20$ s. En el momento del choque la coordenada de los trenes es igual a

$$x_{pas} = x_{mer} = 315 \text{ m}.$$

244. Designemos con L la longitud del anillo en rotación ($L = 2\pi R$). Examinemos un pequeño tramo del anillo de largo ΔL y masa

$$\Delta m = \frac{m}{L}\Delta L.$$

Sobre el tramo señalado de dos lados actúan las fuerzas $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ dirigidas por las tangentes al anillo e iguales en módulo ($T_1 = T_2$). Su resultante $\vec{F}$ está dirigida por el radio al centro del anillo (fig. 271) y comunica al tramo en cuestión la aceleración centrípeda

$$a = \omega^2 R.$$

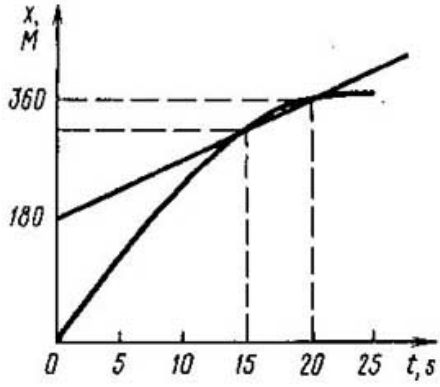


Fig. 270

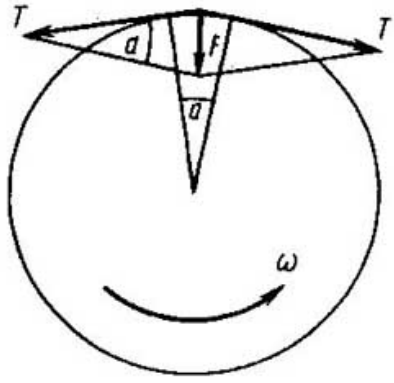


Fig. 271

En la figura 271 se ve que

$$F = 2T \operatorname{sen} (\alpha/2).$$

Anotemos la ecuación del movimiento del tramo señalado:

$$F = \omega^2 R \cdot \Delta m,$$

o

$$2T \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \omega^2 R \frac{m \cdot \Delta L}{L}. \qquad (1)$$

Tal que

$$T = k (L - l), \quad L = 2\pi R$$

y con pequeños ángulos

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta L}{2R},$$

de la igualdad (1) obtenemos:

$$k (2\pi R - l) \frac{\Delta L}{2R} = \frac{\omega^2 m}{2\pi} \Delta L.$$

De aquí

$$R = \frac{2\pi kl}{4\pi^2 k - \omega^2 m}.$$

De esta fórmula se desprende que con

$$\omega = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$$

el anillo debe extenderse ilimitadamente hasta que se cumple la ley de Hook ($T \sim \Delta l$). Pero, por supuesto, la ley de Hook se viola ya con pequeños Δl. Prácticamente a tal velocidad de rotación el anillo se destruirá.

245. Con arreglo a las indicaciones del voltímetro y del amperímetro A1 la resistencia de todo el circuito es igual a

$$R = \frac{U}{I} = 2 \text{ Ohms}.$$

Ya que el amperímetro A2 es ideal (su resistencia se considera igual a cero), los puntos a y b para el cálculo de las resistencias (fig. 272) pueden ser considerados cortocircuitados entre sí. Adoptemos que el resistor R1 tiene la resistencia $R_1 = 1$ Ohm. Entonces por simple selección nos convencemos de que $R_2 = 4$ Ohms, mientras que para las resistencias de los resistores R3 y R4 son posibles dos variantes: o bien $R_3 = 2$ Ohms y $R_4 = 3$ Ohms o $R_3 = 3$ Ohms y $R_4 = 2$ Ohms.

La suma algebraica de corrientes eléctricas en el punto de bifurcación a es igual a cero:

$$I_1 - I_3 - I_5 = 0. \qquad (1)$$

Por consiguiente, para determinar la intensidad de corriente I_5 que fluye por el amperímetro A2 es suficiente conocer las corrientes I_1 y I_3.

Las corrientes I_1 y I_2 que fluyen por los resistores R1 y R2 son inversamente proporcionales a los valores de las resistencias de estos resistores:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = 4.$$

Pero

$$I_1 + I_2 = I = 5\text{A}.$$

De aquí

$$I_1 = 4\text{A}.$$

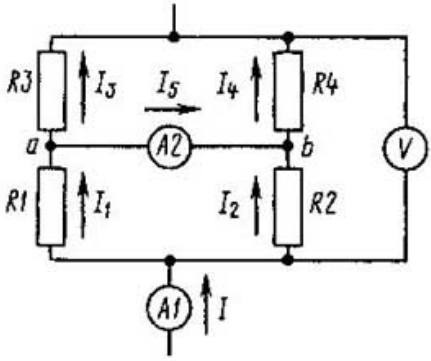


Fig. 272

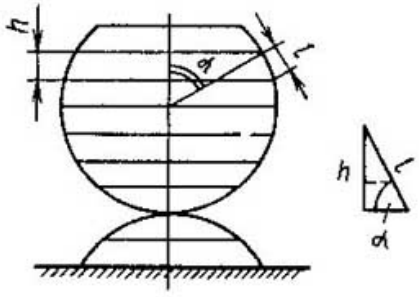


Fig. 273

De forma análoga se puede anotar:

$$\frac{I_3}{I_4} = \frac{R_4}{R_3}, \qquad I_3 + I_4 = I.$$

Si

$$R_3 = 2 \text{ Ohms} \quad \text{y} \quad R_4 = 3 \text{ Ohms},$$

entonces

$$\frac{I_3}{I_4} = \frac{3}{2} \text{ y } I_3 + I_4 = I = 5A,$$

de donde

$$I_3 = 3A.$$

Entonces de la igualdad (1) hallamos:

$$I_5 = I_1 - I_3 = 1A.$$

Pero si $R_3 = 3$ Ohms y $R_4 = 2$ Ohms, entonces

$$I_3 = 2 \text{ A y } I_5 = 2A.$$

De este modo, son posibles dos valores para la intensidad de corriente que fluye por el amperímetro A2.

246. Dividamos la copa en bandas horizontales planas de altura h (fig. 273). La superficie S de la banda es igual a

$$S = 2\pi rl = 2\pi R \operatorname{sen}\alpha \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} = 2\pi Rh.$$

Si ρ es la masa del tramo de la banda cuya superficie equivale a la unidad, la masa m de toda la banda se determina por la fórmula

$$m = 2\pi Rh\rho.$$

Como se deduce de esta fórmula, la superficie de la banda no depende de su radio. Esto significa que la masa de la copa está uniformemente distribuida por su altura. Consiguientemente, el centro de gravedad se halla en el medio de la altura, o sea a la altura R de la base de la copa.

247. Hallemos la intensidad del campo electrostático en el punto que se encuentra a la distancia x del centro de la capa de barrera (fig. 274). Para ello dividamos toda la capa en tramos muy delgados de espesor Δl. Dos tales tramos dispuestos simétricamente respecto al centro de la capa forman un condensador plano cuya densidad de la carga es

$$\Delta\sigma = \rho_0 \cdot \Delta l.$$

La intensidad del campo eléctrico, creado por las cargas de estas capas, en el espacio entre las mismas es igual a

$$\Delta E = \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\rho_0 \cdot \Delta l}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Fuera de estas capas la intensidad del campo es igual a cero.

Con arreglo al principio de superposición la intensidad del campo $\vec{E}$ en el punto A, separado del centro de la capa a la distancia x, es igual a la suma de intensidades de los campos de todos tales condensadores. Ya que en la creación del campo eléctrico en el punto A participan sólo los

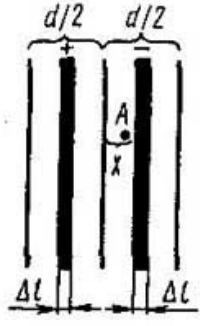


Fig. 274

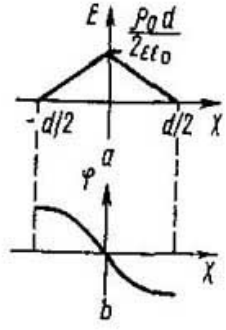


Fig. 275

condensadores cuyas armaduras se hallan a las distancias mayor que $|x|$ del centro de la capa, entonces

$$E = \Sigma \frac{\rho_4 \cdot \Delta l}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \varepsilon} \Sigma \Delta l = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{d}{2} - x\right).$$

De manera análoga para los puntos de coordenadas $0 \geqslant x \geqslant -\frac{d}{2}$ tenemos:

$$E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{d}{2} + x\right).$$

El gráfico de la intensidad del campo eléctrico en la capa de barrera se muestra en la figura 275, a.

Ahora hallemos como varía a lo largo del eje x el potencial del campo. Adoptemos que el potencial es igual a cero en los puntos de coordenada $x = 0$, o sea en el centro de la capa. Entonces el potencial del punto A es igual al trabajo realizado por el campo eléctrico durante el desplazamiento de la unidad de carga positiva de este punto al centro de la capa. La fuerza que actúa sobre la carga en caso de tal desplazamiento está dirigida en el sentido opuesto al desplazamiento, por ello el trabajo y, consiguientemente, el potencial del campo en el punto A son negativos. Determinado gráficamente la magnitud absoluta del potencial φ_A como superficie de la figura dispuesta debajo del gráfico E (x), hallamos:

$$\varphi_A = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 \varepsilon} x^2 - \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon} x \quad \text{con } x > 0,$$

$$\varphi_A = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 \varepsilon} x^2 + \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon} x \quad \text{con } x < 0.$$

El gráfico de variación del potencial se muestra en la figura 275, b.

248. De la ecuación de la reacción de combustión de hidrógeno

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

se desprende que al quemarse 1 kmol de hidrógeno (2 kg) se forma 1 kmol de vapor de agua (18 kg). Consiguientemente, el gasto por segundo del vapor de agua que sale de la tobera del cohete es igual a $\mu = 216$ kg de los vapores de agua.

Con arreglo a la tercera ley de Newton la fuerza de empuje del motor es igual en módulo a la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre el vapor expulsado de la tobera del cohete. Ya que en el tiempo τ el vapor adquiere el impulso $\mu\vec{v}$, entonces

$$F = \frac{\mu \cdot \Delta t \cdot u}{\Delta t} = \mu u \approx 9 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

249. El número de moléculas en la capa monomolecular de superficie S es aproximadamente igual a

$$Z_0 = \frac{S}{d^2}.$$

En el tiempo Δt contra la pared dan

$$Z = \frac{1}{2} n |\bar{v}_x| S \cdot \Delta t$$

de moléculas (en donde n es la concentración de moléculas y $|\bar{v}_x|$ el valor medio del módulo de proyección de la velocidad de las moléculas sobre el eje perpendicular a la pared). Suponiendo que

$$3|\bar{v}_x|^2 \approx \bar{v}^2 = \frac{3RT}{M},$$

obtendremos:

$$|\bar{v}_x| = \sqrt{\frac{RT}{M}}.$$

La concentración de las moléculas puede ser hallada de la ecuación principal de la teoría molecular-cinética

$$p = nkT.$$

De este modo,

$$Z = \frac{1}{2} \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{RT}{M}}.$$

En el cátodo se forma la capa monomolecular, cuando Z llega a ser igual a Z_0, o sea en el lapso de tiempo Δt que puede ser hallado de la ecuación

$$\frac{1}{2} \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{RT}{M}} S \cdot \Delta t = \frac{S}{d^2}.$$

Al solucionar esta ecuación respecto a Δt y sustituir los valores de las magnitudes obtenemos:

$$\Delta t = \frac{2}{pd^2}\sqrt{\frac{MkT}{N_A}} \approx 3 \cdot 10^{-2}\ \text{s}.$$

250. El manómetro de mercurio en forma de U (fig. 276) mide la sobrepresión Δp, o sea indica en cuánto la presión p en el codo izquierdo del manómetro es mayor que la presión atmosférica p_0. La limitación en la gama de los valores de la sobrepresión a medir se impone por la longitud de los tubos del manómetro. No se puede medir la sobrepresión mayor que la con la cual el mercurio llega hasta el borde del codo derecho (según la figura). El valor límite de la sobrepresión a medir para el manómetro en cuestión es igual a 10^5 Pa.

En el caso de la conexión en serie de dos manómetros (fig. 277) la sobrepresión Δp_1 en el codo izquierdo del manometro 1 será mayor que ρgH, ya que la presión p_2 en el codo izquierdo del manómetro 2 es mayor que la atmosférica en la magnitud ρgh:

$$p_2 = p_0 + \rho gh. \qquad (1)$$

Por ello

$$\Delta p_1 = \rho g (H + h). \qquad (2)$$

El aire comprimido en el codo izquierdo del manómetro 2 ocupa el volumen

$$V = S\frac{H + h}{2},$$

en donde S es la superficie de sección de los tubos. Primero este aire ocupaba el volumen

$$V = S\frac{H}{2}$$

en el codo derecho del manómetro 1 y el mismo volumen en el codo izquierdo del manómetro 2 y la presión de este aire era igual a la atmo-

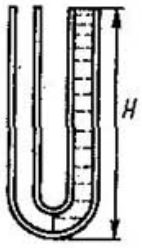


Fig. 276

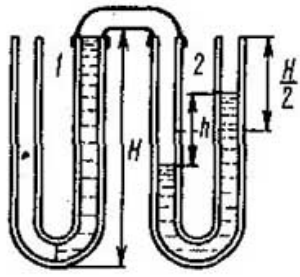


Fig. 277

sférica (p_0). Suponiendo que el aire comprimido es isotérmico se puede aplicar la ley de Boyle – Mariotte:

$$\frac{p_2 \cdot}{p_0} = \frac{SH}{\frac{1}{2}S(H+h)},$$

en donde

$$p_2 = 2p_0 \frac{H}{H+h}.$$

Al multiplicar el numerador y el denominador en la parte derecha de esta igualdad por ρg, obtendremos:

$$p_2 = 2p_0 \frac{\rho gH}{\rho gH + \rho gh} = 2\frac{p_0^2}{p_0 + \rho gh} = \frac{2p_0^2}{p_2}, \qquad (3)$$

de donde

$$p_2 = \sqrt{2p_0}.$$

Ya que

$$p_1 = p_0 + p_2,$$

entonces

$$\Delta p_1 = p_2 \approx \sqrt{2} \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

251. Designemos con D el poder óptico de la lente. Cuando el hombre vuelve de cara al pájaro, él observa la imagen virtual del mismo. Por la fórmula de la lente

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_3} = D. \qquad (1)$$

Una de las imágenes del pájaro, la cual se ve cuando el hombre se encuentra de espaldas al mismo, resulta por reflejarse en la superficie de los anteojos que dan al hombre, mientras que la segunda, por reflejarse de la segunda superficie. Con ello los rayos deben atravesar la lente, reflejarse de la superficie especular y a continuación volver a atravesar la lente. Esto significa que la segunda imagen es creada por el sistema óptico "lente – espejo – lente". El poder óptico de este sistema es igual a

$$D' = D + \frac{2}{R} + D = 2D + \frac{2}{R},$$

en donde R es el radio de la superficie trasera de los anteojos.

Supongamos que la imagen que se obtiene como resultado de reflejarse de la superficie delantera de la lente se halla a la distancia de 5 m. Entonces esta superficie debe ser plana ya que $d = 5$ m.

Para la segunda imagen en este caso tenemos:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_2} = D' = 2D + \frac{2}{R}. \qquad (2)$$

Tomando en consideración (1) obtenemos:

$$\frac{2}{R} = \frac{2}{f_3} - \frac{1}{d} - \frac{1}{f_2}.$$

Ya que para la lente

$$D = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$$

(en donde R y $r = \infty$ son los radios de las superficies de la lente), entonces

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_3} = (n-1)\left(\frac{1}{f_3} - \frac{1}{2d} - \frac{1}{2f_2}\right).$$

Sustituyendo aquí los valores de R_2, f_3 y d, hallamos:

$$n = 1{,}5.$$

Si se supone que tras reflejarse de la superficie delantera de la lente, la imagen resulta a la distancia de $\frac{5}{7}$ m y se efectúan los cálculos correspondientes, obtendremos un resultado absurdo: $n = 0{,}75$.

252. A primera vista la respuesta es notoria: ya que la estrella se encuentra muy lejos, sobre la lente cae muy poca energía procedente de la misma, la cual es insuficiente para prender el papel. Pero con ello había que tener en cuenta que el tamaño de la imagen de la estrella asimismo es muy pequeño, debido a lo cual la energía que absorbe la unidad de superficie de la imagen podría resultar considerable y quizás suficiente para prender el papel.

Designemos con I la energía que emite la estrella en una unidad del ángulo sólido (intensidad de la estrella), con L la distancia hasta la estrella y con d_1 el diámetro de la lente. La iluminación de la superficie de la lente se expresa por la fórmula

$$E_0 = \frac{I}{L^2}.$$

Por ello para el flujo luminoso que da contra la superficie de la lente se puede anotar:

$$Fl = E_0 \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi d_1^2}{4L^2} \cdot I.$$

La imagen de la estrella resulta situada en el plano focal de la lente (fig. 278). Si se designa con α el diámetro angular de la estrella, el diámetro d de la imagen de la estrella será igual a αF (en donde F es la distancia focal de la lente).

Ya que $\alpha = \frac{D}{L}$ (en donde D es el diámetro de la estrella), entonces

$$d = \alpha F = \frac{D}{L} F,$$

y la superficie de la imagen de la estrella se expresa como sigue:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi D^2 F^2}{4L^2}.$$

Por ello para la iluminación de la imagen de la estrella obtenemos:

$$E = \frac{Fl}{S} = \frac{\pi d_1^2 I \cdot 4L^2}{4L^2 \pi D^2 F^2} = \frac{I d_1^2}{D^2 F^2}.$$

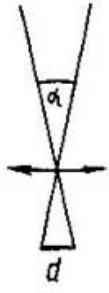


Fig. 278

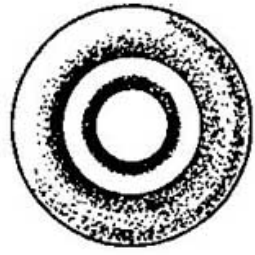


Fig. 279

De aquí se deduce que la iluminación de la imagen de la estrella no depende de la distancia hasta la misma. Si todas las estrellas tuviesen un diámetro igual y la misma intensidad de la luz, sería igual la iluminación de sus imágenes. (Justamente por ello las farolas en hilera larga siempre parecen igualmente brillantes.) Puesto que existen estrellas, las cuales disponiendo de un diámetro menor que el del Sol, emiten más energía que éste, entonces, al parecer, la luz procedente de tales estrellas concentrada en la imagen debería prender el papel. Sin embargo, la experiencia no lo confirma.

En los razonamientos expuestos líneas arriba se suponía que el diámetro de la imagen de la estrella se determina por la geometría de la trayectoria rectilínea de los rayos. En realidad esta imagen es difraccional (fig. 279). Por eso el tamaño angular de la estrella es igual a λ/d_1, mientras que el diámetro de la imagen

$$d' = \frac{\lambda}{d_1} F,$$

en donde λ es la longitud de la onda. Este diámetro es mucho mayor que el "geométrico" ($d = \frac{D}{L} F$):

$$\frac{d'}{d} = \frac{\lambda L}{d_1 D} \gg 1.$$

Justamente por ello la iluminación de la imagen es muy exigua. Así, con $d_1 = 2$ cm obtenemos para el tamaño angular del astro el valor $\frac{\lambda}{d_1} = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$.

El diámetro angular del Sol es igual a $4{,}7 \cdot 10^{-3}$ rad. En caso de "alejarse" el Sol hasta la estrella más próxima ($L \approx 4 \cdot 10^{13}$ km) su tamaño angular, determinado por la geometría de la trayectoria rectilínea de los rayos debería ser igual a $1{,}75 \cdot 10^{-8}$ rad. Esto significa que con la distancia señalada hasta el astro el diámetro de la imagen resulta mayor que su tamaño "geométrico"

$$\frac{d'}{d} = \frac{2{,}25 \cdot 10^{-5}}{1{,}75 \cdot 10^{-8}} \approx 1{,}3 \cdot 10^3 \text{ veces.}$$

La superficie de la imagen será $(1{,}3 \cdot 10^3)^2 \approx 1{,}7 \cdot 10^6$ veces mayor. Por consiguiente, la iluminación de la imagen de una estrella de tales parámetros como los del Sol es $1{,}7 \cdot 10^6$ veces menor que la iluminación de la imagen del Sol.

253. Al lanzar la estación espacial energéticamente es ventajoso aprovechar la velocidad orbital disponible del satélite y comunicarle a la estación la velocidad $\vec{u}$ en la misma dirección en la que se movía el satélite. El propio satélite con ello debe adquirir la velocidad $\vec{v}$ dirigida en el sentido opuesto. Por la ley de conservación del impulso

$$mu - M_1 v = Mv_0,$$

en donde M es la masa inicial del satélite; m, la masa de la estación, $M_1 = M - m$, la masa del "resto" y v_0, la velocidad del satélite en la órbita circular. De aquí

$$mv - (M - m)u = Mv_0 \quad y \quad \frac{m}{M} = \frac{v_0 + u}{u + v}. \qquad (1)$$

Hallemos v_0, v y u.

Ya que durante el movimiento del satélite por la órbita circular de radio 2R la aceleración cetrípeda

$$a = \frac{v_0^2}{2R}$$

le es comunicada por la fuerza gravitacional

$$F = G\frac{MM_T}{(2R)^2}$$

(en donde M_T es la masa de la Tierra), entonces

$$\frac{Mv_0^2}{2R} = G\frac{MM_T}{(2R)^2}, \qquad (2)$$

de donde

$$v_0 = \sqrt{G\frac{M_T}{2R}}.$$

La energía mecánica total de la estación a lanzar en el momento del lanzamiento debe ser igual a cero (ver el problema 233):

$$\frac{mu^2}{2} - G\frac{M_T m}{2R} = 0.$$

De aquí

$$u = \sqrt{G\frac{M_T}{R}}. \qquad (3)$$

Con arreglo a la ley de conservación de la energía

$$\frac{M_1 v^2}{2} - G\frac{M_T M_1}{2R} = \frac{M_1 (v')^2}{2} - G\frac{M_T M_1}{R}, \qquad (4)$$

en donde v' es la velocidad del "resto" en el perigeo (fig. 280). Por otro lado, con arreglo a la tercera ley de Kepler

$$2Rv = Rv'. \qquad (5)$$

De (4) y (5) hallemos:

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{3R}}.$$

Al sustituir las expresiones resultadas para v_0, v y u en (1), obtendremos:

$$\frac{m}{M} \approx 0{,}8.$$

254. El sistema consiste en un circuito oscilante, la intensidad de corriente en el cual varía por la ley armónica:

$$I = I_0 \operatorname{sen} \omega t, \qquad (1)$$

en donde ω es la frecuencia de oscilaciones e I_0, la amplitud de corriente.

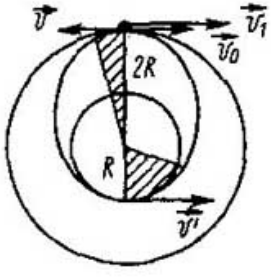


Fig. 280

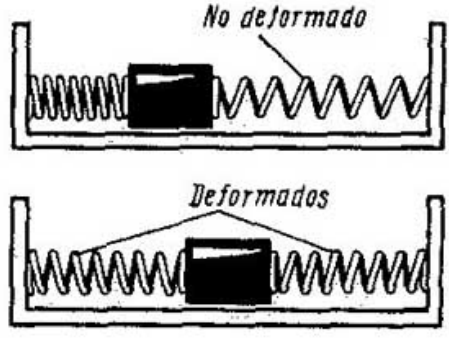


Fig. 281

Ya que los condensadores están acoplados en serie, su capacidad total es igual a $\frac{C}{2}$. Por ello

$$\omega = (\frac{2}{LC})^{1/2} \qquad (2)$$

Para hallar I_0 hagamos uso de la ley de conservación de la energía. Si q_1 es la carga del primer condensador, la carga del segundo condensador es igual a $q_2 = q_0 - q_1$ y con arreglo a la ley de consevación de la energía

$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI^2}{2} + \frac{q_1^2}{2C} + \frac{(q_0 - q_1)^2}{2C},$$

en donde I es la intensidad de corriente en el circuito. De aquí

$$I^2 = \frac{2}{LC} q_1 (q_0 - q_1). \qquad (3)$$

Del teorema sobre el "medio" se desprende que esta expresión es máxima con $q_1 = q_0 - q_1 = \frac{q_0}{2}$. Por ello para la amplitud de la intensidad de corriente en el circuito obtenemos:

$$I_0 = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}}. \qquad (4)$$

Por consiguiente,

$$I = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}} \operatorname{sen} (\sqrt{\frac{2}{LC}} t). \qquad (5)$$

Sustituyendo esta expresión en (3), tenemos:

$$q_1 = \frac{q_0}{2} (1 + \cos \omega t). \qquad (6)$$

La carga del segundo condensador se expresa como sigue:

$$q_2 = q_0 - q_1 = \frac{q_0}{2} (1 - \cos \omega t).$$

La analogía mecánica del sistema se ilustra en la figura 281. En el momento inicial uno de los muelles no está deformado y en el estado de equilibrio ambos muelles se hallan deformados de modo igual.

255. Al investigar la "caja negra" primero hay que comprobar si tiene manantial de FEM, rupturas en el cirucito, cortocircuito o elementos alineales. Después se monta el circuito según el esquema presentado en la figura 282 y se determinan las resistencias entre todos los cuatro terminales de la "caja negra". Las mediciones arrojaron los siguientes valores de las resistencias:

$$R_{AB} = R_{BC} = R_{CD} = R_{AD} = 11{,}5 \text{ Ohms}, \quad R_{AC} = R_{BD} = 15 \text{ Ohms}.$$

Por los resultados de estas mediciones se puede hacer la suposición de que en la caja están realizadas las conexiones según el esquema ofrecido en la figura 283, a, mientras que los resistores poseen sendas resistencias de 15 Ohms.

En efecto, si

$$\frac{R \cdot 3R}{4R} = 11{,}5 \text{ Ohms}$$

y

$$\frac{2R \cdot 2R}{4R} = 15 \text{ Ohms},$$

entonces en ambos casos R = 15 Ohms,

Se puede efectuar los ensayos de control. Si se cierran los bornes A – C, la resistencia en los bornes B – D no debe variar. Si se cierra los bornes A – B, la resistencia en el tramo A – D debe ser igual a

$$R_{AD} = \frac{R \cdot 2R}{3R} = \frac{2}{3} R = 10 \text{ Ohms}.$$

Los ensayos confirman estas conclusiones.

En principio se puede suponer también que las conexiones en la caja están realizadas según el esquema ofrecido en la figura 283, b. No obstante, los ensayos de control no confirman esta suposición. Los ensayos demuestran que los resistores R_5 y R_6 no existen. Al cerrarse

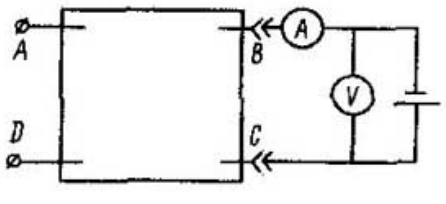


Fig. 282

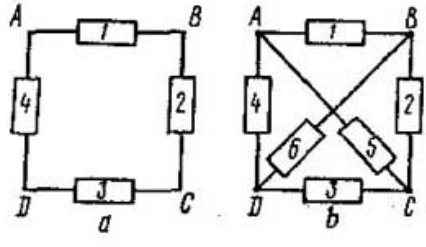


Fig. 283

los bornes A – C la resistencia en el tramo D – C resulta igual que en caso de cerrarse los bornes A – B – C: ambas veces $R_{DC} = \frac{R}{2}$. Tal resultado corresponde al esquema ofrecido en la figura 283, a. Mientras que en el esquema reproducido en la figura 283, b $R_{DB} \neq R'_{DC}$. Consiguientemente, el resistor entre los bornes B – D no existe. De manera análoga se puede exluir la presencia del resistor entre los bornes A – C.

256. La varilla heterogénea está equibrada en el bucle de cordel, o sea suspendida de su centro de gravedad (fig. 284). Luego del brazo corto de la palanca se suspende una carga de masa desconocida y al brazo largo se fija un dinamómetro con ayuda del cual se logra la posición horizontal de la palanca.

Por la regla de momentos

$$Pl_1 = Fl_2,$$

de donde

$$P = \frac{Fl_2}{l_1},$$

en donde P es el peso de la carga; F, las indicaciones del dinamómetro; l_1 y l_2, los brazos de la palanca hecha de la varilla suspendida del hilo.

257. Con tubos de vidrio y de goma y de un embudo se hace un tubo largo en forma de U. En el mismo se vierte agua y se mide la longitud de la columna de aire l_1 (fig. 285, a). Una vez cerrado el orificio superior de un codo, se hace bajar el otro codo. Al medir el nuevo valor l_2 de la longitud de la columna de aire y la diferencia de los niveles h del agua en los codos, al volumen del aire cerrado en el codo izquierdo se puede aplicar la ley de Boyle – Mariotte:

$$p_A l_1 S = (P_A - \rho gh) l_2 S.$$

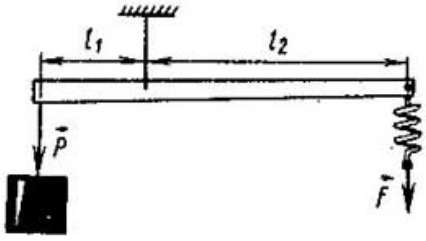


Fig. 284

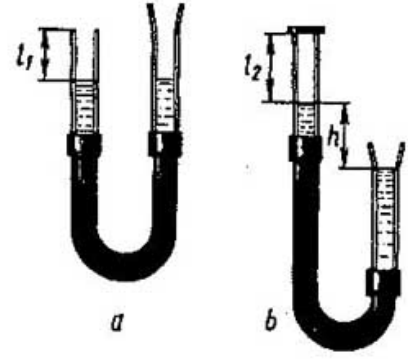


Fig. 285

De aquí hallamos la presión atmosférica p_A:

$$p_A = \frac{\rho g h_2}{l_2 - l_1}.$$

Para elevar la precisión del resultado obtenido hay que aumentar el salto de los niveles del líquido h y la diferencia de los volúmenes del aire en el tubo.

258. Ya que la descarga del condensador se lleva a cabo con arreglo a la ley exponencial

$$U = U_0 e^{-\frac{\tau}{RC}},$$

entonces, midiendo el tiempo en el cual la tensión del condensador disminuye en e = 2,718 veces, se puede determinar la capacidad del condensador por la fórmula

$$C = \frac{\tau}{R},$$

En donde R es la resistencia en el circuito de descarga del condensador. Es más cómodo efectuar tal medición si la descarga del condensador se lleva a cabo a través de un voltímetro de gran resistencia óhmica, el cual con ello acusa la variación de tensión en el condensador. En este caso

$$C = \frac{\tau}{R_i}, \qquad (1)$$

en donde R_i es la resistencia interna del voltímetro la que se determina en un ensayo aparte. Con este objetivo se compone el circuito según el esquema reproducido en la figura 286. En este esquema R es un resistor de resistencia conocida. Tomando lectura de U_1, que indica el voltímetro, se puede anotar

$$U_1 = \frac{\mathcal{E} R_v}{R + R_v},$$

de donde

$$R_v = \frac{U_1 R}{\mathcal{E} - U_1}.$$

Para determinar la capacidad del condensador hay que componer el circuito según el esquema ofrecido en la figura 287. Al cargar el condensador hasta el valor V_0, se pasa la llave a la posición 2 y se cronometra

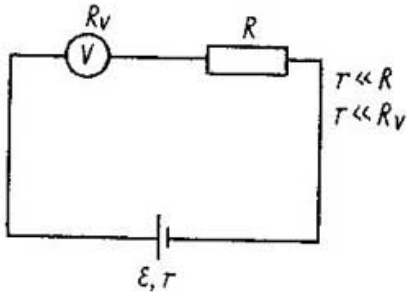


Fig. 286

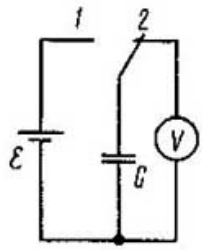


Fig. 287

el tiempo, en el curso del cual la tensión disminuirá e veces, después de lo que se halla capacidad buscada del condensador por la fórmula (1).

Si el tiempo τ resulta breve, entonces en serie con el voltímetro hay que conectar un resistor de resistencia grande R (fig. 288). En este caso la capacidad del condensador se determina por la fórmula

$$C = \frac{\tau}{R_V + R}.$$

Siendo muy pequeña la capacidad del condensador, el valor de la resistencia $R_V + R$ del circuito de descarga se aproxima al valor de la resistencia de fuga del condensador, debido a lo cual la precisión de determinación de la capacidad se aminora sustancialmente.

259. Al convencerse de que en la caja no hay manantiales de FEM se mide la resistencia entre todos los tres pares de contactos en el caso de la conexión directa e inversa del manantial de corriente. Estas mediciones permiten establecer que en la caja se halla un diodo acoplado como se muestra en la figura 80, a o 80, b; es posible también que en la caja se encuentran dos diodos acoplados "al encuentro" uno de otro (fig. 80, c, d).

En los esquemas presentados en las figuras 80, a y b puede no haber resistor si los diodos poseen una resistencia bastante grande en el sentido directo.

Con tales mediciones es difícil distinguir si hay dos diodos de encuentro o un transistor. Para convencerse de que no se trata de un transistor situado en la caja, hay que montar los circuitos primero según el esquema reproducido en la figura 289, a y a continuación según el esquema ofrecido en la figura 289, b. Si en el segundo caso no tiene lugar un incremento de la corriente, en el circuito no se halla conectado un transistor, sino dos diodos de "encuentro".

260. Para determinar el índice de refracción del líquido se puede considerar el líquido en el vaso como una lente cilíndrica y obtener con su auyda en la pantalla la imagen del hilo de la bombilla.

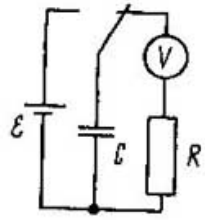
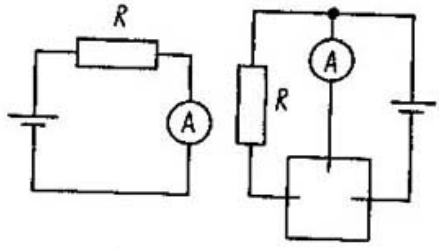


Fig. 288



a b

Fig. 289

Para simplificar los cálculos y elevar la precisión de las mediciones hace falta lograr que la bombilla y la pantalla sean situadas simétricamente al vaso con agua. La trayectoria de los rayos se ilustra en la figura 290. Utilizando las relaciones geométricas

$$d\gamma = R\beta, \quad \alpha = \gamma + \beta$$

y la ley de refracción para los rayos adyacentes al eje

$$\frac{\alpha}{\beta} = n,$$

obtendremos:

$$\beta n = \frac{R\beta}{d} + \beta,$$

de donde

$$n = 1 + \frac{R}{d}.$$

Prescindamos de la desviación de los rayos al pasar a través de las paredes delgadas del vaso. De este modo, para determinar el índice de refracción es suficiente lograr que las distancias d y f sean iguales. Al medir d y el radio del vaso R se halla el índice de refracción n.

261. Designemos con σ la tensión mecánica máxima que soporta sin romperse el material del cable y con S, la superficie de la sección del cable. Entonces la carga máxima que soporta el cable es igual a

$$P_{max} = \sigma S.$$

Si la masa de una losa es m, entonces según la condición

$$\sigma S \geqslant 10\, mg.$$

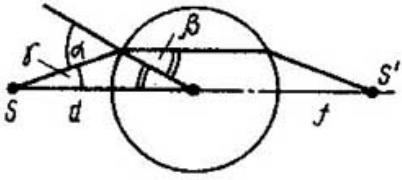


Fig. 290

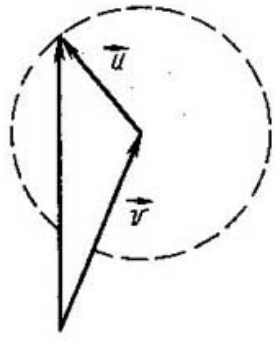


Fig. 291

Al aumentar las dimensiones lineales en k = 12 veces la superficie S aumenta en $k^2 = 144$ veces y la masa de una losa y asimismo el volumen aumenta en $k^3 = 1728$ veces. El número de losas, que es capaz de levantar la grúa, es menor que el número de losas que eleva el modelo en

$$\frac{k^3}{k^2} = k = 12 \text{ veces.}$$

Por consiguiente, el cable de la grúa no soportará una sola losa.

262. La velocidad de la punta de la aguja de reloj respecto a la Tierra es igual a la suma vectorial de la velocidad $\vec{v}$ del témpano con la velocidad $\vec{u}$ de la punta de la aguja de reloj respecto al témpano. Ya que la dirección del vector de $\vec{u}$ puede ser eventual, sus extremos se hallan en la circunferencia de radio u con el centro en la punta del vector de $\vec{v}$ (fig. 291).

Las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de los témpanos son recíprocamente perpendiculartes e iguales en módulo. Es notorio que el vector de $\vec{v}_1 + \vec{u}_1$ puede ser igual al vector de $\vec{v}_2 + \vec{u}_2$ (en donde $u_1 = u_2 = u$) sólo si los extremos de los vectores de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ se hallan en un punto (fig. 292). Pero en el caso ilustrado en la figura 292, a existen dos posibles puntos para los extremos de los vectores de u_1 y u_2; estos ambos puntos se hallan en las intersecciones de las circunferencias de los extremos posibles de estos vectores. Para que exista sólo un tal punto (la posición del reloj es una sola) las circunferencias de los extremos de los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ deben estar en contacto (fig. 292, b). Como se ve en la figura, esto es posible si las velocidades de los témpanos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son tales que

$$v_1 = v_2 = u\sqrt{2}.$$

Ya que

$$u = \omega l$$

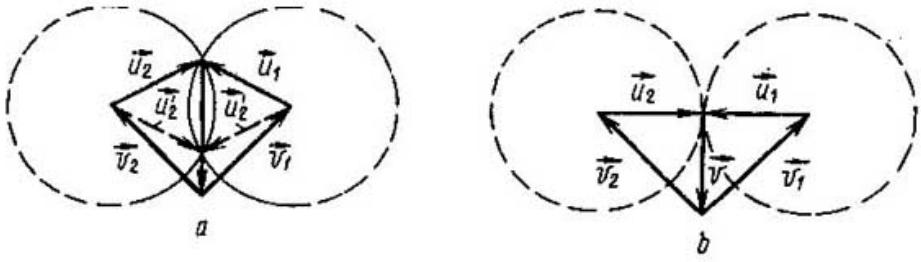


Fig. 292

(en donde $\omega = \frac{2\pi}{60}$ c^{-1} es la velocidad angular de la aguja y $l = 10^{-2}$ m, su longitud), entonces

$$v_1 = v_2 \approx 1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}.$$

En 24 horas los témpanos recorren la distancia

$$L = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \approx 130 \text{ m}.$$

263. El esquema posible del circuito que se halla dentro de la caja se muestra en la figura 293. Si al conmutarse la pila la dirección de la corriente no varía, entonces

$$\frac{U + U_1}{R} = 1 \text{ A}, \quad \frac{U - U_1}{R} = 0{,}5 \text{ A}.$$

De aquí U = 4,5 V y R = 6 Ohms.

Pero si la dirección de corriente al conmutarse la pila cambia, entonces

$$\frac{U + U_1}{R} = 1 \text{ A}, \quad \frac{U_1 - U}{R} = 0{,}5 \text{ A}.$$

De aquí U = 0,5 V y R = 2 Ohms.

264. Ante todo hallemos la aceleración con la que se mueve el cubo. Como es sabido, la diferencia de las distancias l_1 y l_2 recorridas por el cuerpo en sucesivos e iguales plazos de tiempo τ es igual a

$$l_2 - l_1 = a\tau^2,$$

en donde $\vec{a}$ es la aceleración con la que se mueve el cuerpo. Al

determinar según la figura 82 con ayuda de una regla graduada y la escala asignada la magnitud $l_2 - l_1$, hallaremos:

$$a = \frac{l_2 - l_1}{\rho^2} \approx \frac{0{,}07}{(0{,}1\ s)^2} = 7\ m/s^2.$$

Esta aceleración está dirigida hacia abajo a lo largo del plano inclinado.

La ecuación de movimiento del cubo a lo largo del eje X (fig. 294) tiene el siguiente aspecto:

$$ma = mg\,\text{sen}\alpha + F_{roz.\,X'} \qquad (1)$$

en donde $F_{roz.\,Z}$ es la proyección de la fuerza de rozamiento sobre el eje X.

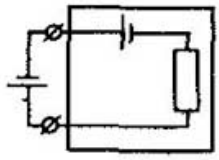


Fig. 293

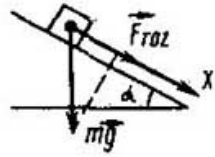


Fig. 294

El módulo de la fuerza de rozamiento es igual a μN (en donde μ es el coeficiente de rozamiento). Tal que

$$N = mg\cos\alpha,$$

entonces

$$F_{roz} = \mu mg\cos\alpha.$$

Para hallar $F_{roz.\,X}$ hay que esclarecer a dónde está dirigida la fuerza de rozamiento. Notemos que si la fuerza de rozamiento fuese igual a cero, de la ecuación (1) se deduciría que

$$a' = g\,\text{sen}\,\alpha.$$

Ya que $\text{sen}\,\alpha = \left|\frac{AB}{BC}\right| = \frac{3}{5}$, entonces

$$a' \approx 6\ m/s^2.$$

Pero ya que en realidad en dicho caso $a = 7\ m/s^2$, se puede sacar la conclusión de que $F_{roz} \neq 0$. Esto quiere decir que $F_{roz.\,X} > 0$ y el cubo se

mueve hacia arriba. Por ello la ecuación de movimiento del cubo se escribirá como sigue:

$$ma = mg \operatorname{sen} \geqslant + \mu mg \cos \alpha,$$

o

$$a = g \operatorname{sen} \alpha + \mu g \cos \alpha,$$

donde

$$\cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}.$$

De aquí

$$\mu \approx 0{,}13.$$

265. Al designar con r la resistencia de cada voltímetro, según el esquema (fig. 295) se puede escribir:

$$U_3 = rI_3, \quad U_2 = rI_2, \quad U_1 = rI_1.$$

Por otro lado,

$$U_2 = U_3 + I_3 R = U_3 + U_3 \frac{R}{r}, \tag{1}$$

$$U_1 = U_2 + (I_2 + I_3) R = U_2 + (U_2 + U_3) \frac{R}{r}. \tag{2}$$

Excluyendo de este sistema de ecuaciones a $\frac{R}{r}$, obtenemos:

$$U_2^2 + U_2 U_3 - U_1 U_3 - U_3^2 = 0.$$

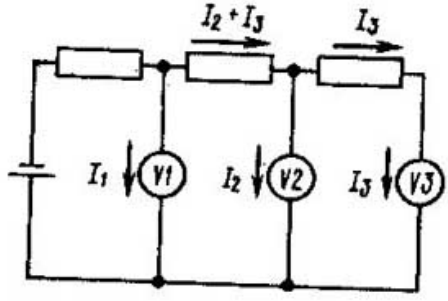


Fig. 295

De aquí

$$U_2 = -\frac{1}{2} U_3 + \sqrt{\frac{U}{4^2}(5U_3 + 4U_1)} \approx 8{,}6 \text{ V}.$$

266. En el ciclo ABCA el gas adquiere calor en los tramos AB y BC y lo cede en el tramo CA. Por consiguiente,

$$\eta = \frac{A}{Q_{AB} + Q_{BC}},$$

en donde A es el trabajo realizado por el gas en un ciclo.

Ya que este trabajo es numéricamente igual a la superficie de la figura limitada por el gráfico del ciclo, entonces, como se ve en la figura, el trabajo realizado por el gas en ambos casos es igual. Pero en el ciclo ACDA el gas adquiere calor sólo en el tramo AC. Por ello

$$\eta_2 = \frac{A}{Q_{AC}}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_{AC}}{Q_{AB} + Q_{BC}}. \qquad (1)$$

Ya que el proceso AB es isocórico, entonces

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2} R (T_B - T_A).$$

Pero

$$T_A = \frac{p_0 V_0}{R} \text{ y } T_C = \frac{2p_0 V_0}{R}.$$

Por consiguiente,

$$Q_{AB} = \frac{3}{2}(2p_0 V_0 - p_0 V_0) = \frac{3}{2} p_0 V_0. \qquad (2)$$

A continuación,

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + A_{BC} = \frac{3}{2} R (T_C - T_B) + 2p_0 (3V_0 - V_0) = 10 p_0 V_0. \qquad (3)$$

Y, por último,

$$Q_{AC} = \Delta U_{AC} + A_{AC} = \frac{3}{2} R (T_C - T_A) + \frac{3}{2} p_0 (3V_0 - V_0) = 10{,}5 p_0 V_0. \quad (4)$$

Al sustituir las expresiones halladas para Q_{AC}, Q_{AB} y Q_{BC} en (1), obtendremos:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{21}{23}.$$

267. Ya que el módulo E de la intensidad del campo eléctrico junto a la superficie de la esfera de radio R, sobre la cual se halla la carga Q, se determina por la fórmula

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

mientras que el potencial φ, por la fórmula

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

entonces

$$\varphi = ER.$$

Si E no debe ser superior a 30 kV/cm, entonces φ no puede exceder de

$$\varphi_{máx} = E_{max} R = 4{,}5 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

Tampoco debe exceder del valor de 30 kV/cm la intensidad del campo junto a la superficie de la cinta. Ya que para la cinta

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

(en donde σ es la densidad superficial de la carga), entonces

$$\sigma_{max} = 2\varepsilon_0 E_{max}.$$

La intensidad de corriente, igual a la carga transferida por la cinta en la unidad de tiempo se determina como sigue:

$$I_{max} = \frac{\sigma_{max}\, d\,(v\Delta t)}{\Delta} = 2\varepsilon_0 E_{max}\, dv \approx 10^{-3} \text{ A}.$$

268. Designemos con n_1 y n_2 el número de moléculas respectivamente de $^{235}UF_6$ y $^{238}UF_6$ en la unidad de volumen de gas UF_6. El número N_1 de moléculas de $^{235}UF_6$, las cuales en el tiempo t pasan por el orificio de superficie S es igual a

$$N = |v_{x_1}| S t n_1,$$

mientras que el número N_2 de moléculas de $238UF_6$ que pasan en el tiempo t por el orificio de superficie S

$$N_2 = |v_{x_2}| S t n_2,$$

en donde $|v_{x_1}|$ y $|v_{x_2}|$ son los valores medios de los módulos de proyecciones de las velocidades de moléculas de $^{235}UF_6$ y $^{238}UF_6$ sobre el eje X dirigido perpendicularmente al orificio.

Para la relación N_1/N_2 tenemos:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{|v_{x_1}| n_1}{|v_{x_2}| n_2}.$$

Es evidente que

$$\frac{|v_{x_1}|}{|v_{x_2}|} = \frac{v_1}{v_2},$$

en donde v_1 y v_2 son las velocidades cuadráticas medias de movimiento de las moléculas de gases. Ya que

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

(en donde m es la masa de la molécula), entonces

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}},$$

en donde m_1 y m_2 son las masas de las moléculas de $^{235}UF_6$ y $^{238}UF_6$, respectivamente. Al sustituir los valores de las magnitudes, obtenemos:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{7}{1000} \sqrt{\frac{352}{349}} = \frac{7{,}03}{1000}.$$

269. Sea m_1' la masa de la primera bola, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_1'$ son sus velocidades respectivamente antes y después de la colisión, m_2 es la masa de la segunda bola, mientras que $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_2'$ son las velocidades de la segunda bola antes y después de la colisión. Con arreglo a la ley de conservación del impulso

$$m_1 \cdot \Delta\vec{v}_1 + m_2 \cdot \Delta\vec{v}_2 = 0, \quad \text{o} \quad m_1 \cdot \Delta\vec{v}_1 = -m_2 \cdot \Delta\vec{v}_2, \qquad (1)$$

en donde $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_1' - \vec{v}_1$ es la variación de velocidad de la primera y $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_2' - \vec{v}_2$ la variación de velocidad de la segunda bola en la colisión. De la igualdad (1) obtenemos:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\Delta v_2}{\Delta v_1}. \qquad (2)$$

De este modo, para hallar la relación $\frac{m_1}{m_2}$ de masas de las bolas es preciso construir los vectores $\Delta\vec{v}_1$ y $\Delta\vec{v}_2$ y seguidamente tomar la relación contraria $\frac{\Delta v_2}{\Delta v_1}$ de sus módulos.

Las velocidades de las bolas son iguales a las relaciones entre los desplazamientos de las bolas entre destellos sucesivos de la lámpara y el lapso de tiempo τ entre los mismos. Ya que los valores de τ para ambas bolas tanto antes como después de la colisión son iguales, entonces en la escala de $1 : \frac{1}{\tau}$ los vectores, que ilustran las velocidades de las bolas, simplemente son iguales a los vectores de desplazamientos de las bolas en el tiempo que media entre los destellos sucesivos de la lámpara. De este se puede valerse para hallar los vectores $\Delta\vec{v}_1$ y $\Delta\vec{v}_2$.

En la figura 87 se muestra el movimiento de una de las bolas antes de la colisión. Para construir el vector Δv_1 hay que conocer también: ¿cómo se movía esta bola después de la colisión por el trayecto II, III o IV? Para esclarecerlo hay que examinar todas las variantes posibles (en suma son tres). En el caso de seleccionar correctamente las trayectorias de movimiento de las bolas los vectores $\Delta\vec{v}_1$ y $\Delta\vec{v}_2$, con arreglo a la igualdad (1), deben ser dirigidos en sentidos opuestos.

Notemos que el vector $\Delta\vec{v}$ no cambia al "transformarse" el movimiento de la bola: si antes de la colisión la bola 1 se moviera por el trayecto I y después de la colisión por el trayecto II, entonces el vector $\Delta\vec{v}$ sería igual que en el caso, cuando antes de la colisión la bola se mueve por el trayecto II y después de la misma por el trayecto I.

Supongamos que a la bola 1 pertenecen los trayectos I y II, mientras que a la bola 2, los trayectos II y IV. Construyendo para este caso los vectores de variaciones de las velocidades de las bolas (fig. 296, a) se puede convencerse de que los mismos no se hallan dirigidos por una

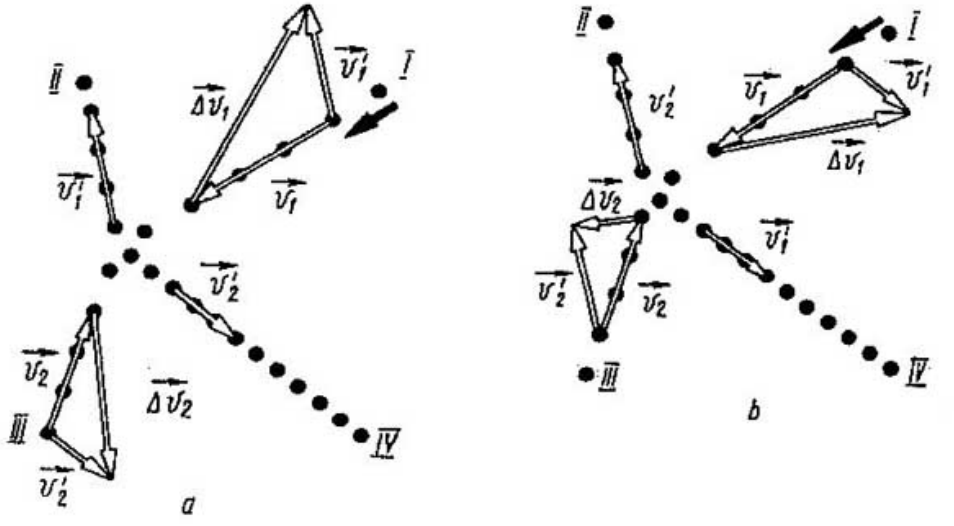


Fig. 296

recta (en la figura 296 los vectores $\vec{v}_1$ con fines de comodidad están construidos en la escala de $1 : \frac{1}{3\tau}$). Por consiguiente, la suposición hecha no es justa. Comprobando de la misma manera las demás variantes posibles nos convencemos de que a la bola 1 pertenecen los trayectos I y IV, mientras que a la bola 2, los trayectos II y III (fig. 296, b). Al medir las longitudes de los vectores que reproducen a $\Delta \vec{v}_1$ y $\Delta \vec{v}_2$ obtenemos:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta \vec{v}_1} = \frac{1}{3}.$$

Esclarecemos ahora en qué sentido se movía antes de la colisión la segunda bola. Designemos con τ_1 el tiempo que media entre el momento de la colisión de las bolas y el último destello de la lámpara antes de la colisión. Está claro que la relación entre el desplazamiento de la bola en este tiempo y el desplazamiento de la bola en el tiempo τ, que media entre los destellos, es igual a la relación de τ_1/τ. Al medir los desplazamientos señalados de la primera bola hallamos que

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{11}{19}.$$

La misma debe ser esta relación para la segunda bola. Efectuando la medición directa nos convencemos de que a esta condición satisface el

trayecto III. Por consiguiente, la bola 2 antes de la colisión se movía por el trayecto III.

270. La intensidad de corriente que fluye por el circuito con llave abierta es igual a

$$I_1 = \frac{U}{2R} = 1{,}5 \text{ A}.$$

Con ello el voltímetro acusa la tensión en el resistor R3

$$U_1 = I_1 R = 150 \text{ V}.$$

Una vez cerrada la llave (fig. 297), en la bobina surge la FEM de autoinducción que no deja variar la corriente que fluye por la bobina. Por ello, en el primer momento, después de cerrada la llave, la intensidad de corriente en la bobina es igual a $I_1 = 1{,}5$ A. El voltímetro en este momento indica la tensión en el resistor R_2

$$U_2 = I_2 R.$$

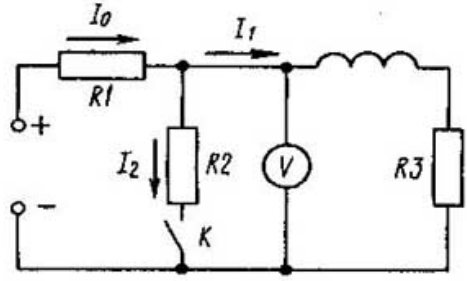


Fig. 297

De las igualdades

$$I_0 = I_1 + I_2, \qquad U = I_0 R + I_2 R$$

hallamos:

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{U}{R} - I_1\right) = 0{,}75 \text{ A}.$$

En el primer momento, después de cerrada la llave, el voltímetro acusará la tensión

$$U_2 = I_2 R = 75 \text{ V},$$

mientras que al establecerse la intensidad de corriente en el circuito, la tensión

$$U_2' = U - I_0' R = U - \frac{U}{R + \frac{R}{2}} R = \frac{1}{3} U = 100 \text{ V}.$$

De esta forma, inmediatamente después de haber cerrada la llave, la indicación del voltímetro cae a salto desde 150 V hasta 75 V y luego crece progresivamente hasta 100 V (fig. 298).

271. En el satélite de la Luna que se mueve por la órbita circular de radio R, de parte de la Luna actúa la fuerza gravitacional igual a

$$G \frac{M_L m}{R^2} = m g_L \frac{r_L^2}{R^2},$$

en donde $g_L = G \frac{M_L}{r_L^2}$ es la aceleración de caída libre junto a la superficie de la Luna; M_L, la masa de la Luna; r_L, su radio y m, la masa del satélite. Esta fuerza comunica al satélite la aceleración centrípeda

$$\omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

en donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ es la velocidad angular de rotación del satélite; T, el período de su rotación por la órbita. Con arreglo a la segunda ley de Newton

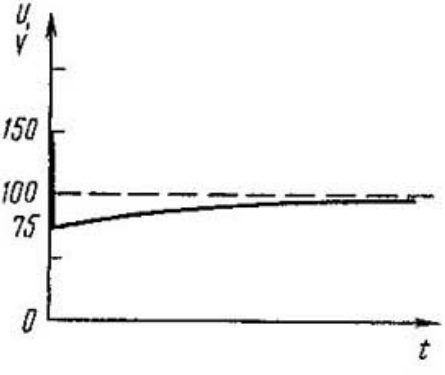


Fig. 298

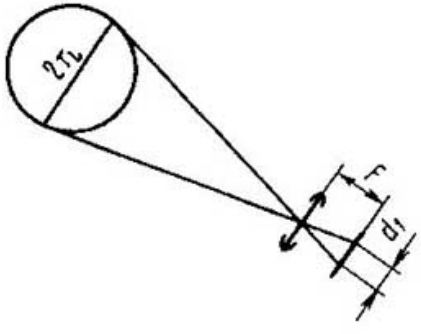


Fig. 299

$$mg_L \left(\frac{r_L}{R}\right)^2 = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

De aquí

$$T = 2\pi \frac{R}{r_L}\sqrt{\frac{R}{g_L}}.$$

Los valores desconocidos de R y r_L, que forman parte de esta fórmula, pueden ser hallados utilizando los datos de fotografías de la Luna tomadas desde la Tierra y desde el satélite. Si se toma en consideración que la Luna se halla de la Tierra a la distancia mucho mayor que su diámetro y que al fotografiar desde la Tierra la imagen de la Luna resulta en el plano focal del objetivo (fig. 299), se puede escribir:

$$\frac{d_1}{2r_L} = \frac{F}{L},$$

de donde

$$r_L = \frac{d_1 L}{2F},$$

en donde d_1 es el diámetro de la imagen: L, la distancia entre la Tierra y la Luna; F, la distancia focal de la lente.

Al fotografiar desde el satélite (fig. 300) en la película se obtiene la imagen de una parte de la superficie lunar limitada por las tangentes OA y OB. Partiendo de la similitud de los triángulos OMN y OCB tenemos:

$$\frac{|BC|}{|MN|} = \frac{R}{|ON|},$$

o

$$\frac{2r_L}{d_2} = \frac{R}{a},$$

donde

$$a = \sqrt{F^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

De aquí

$$R = \frac{2r_L}{d_2} = \frac{d_1 L}{d_2 F} a.$$

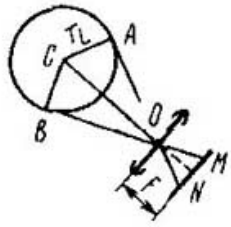


Fig. 300

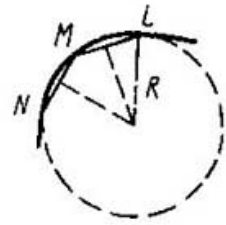


Fig. 301

Al sustituir las expresiones halladas para r_L y R en la fórmula para el período T, obtendremos:

$$T = 4\pi \frac{a}{d_2} \sqrt{\frac{d_1 L}{g_L d_2 F}} a \approx 6{,}23 \cdot 10^4 \text{ s}.$$

272. En el caso del equilibrio el número de las partículas en la cavidad ha de permanecer constante. Esto significa que el número de las partículas, que en el tiempo Δt penetran en la cavidad, debe ser igual al número de las partículas que en ese tiempo abandonan la misma. Valiéndose de la fórmula para el número de las partículas que vienen con el gas sobre el área de superficie S, el número de partículas N que penetran en la cavidad se puede expresar como sigue:

$$N = N_1 + N_2 = \frac{1}{2} n_1 S |\overline{v}_{X_1}| \cdot \Delta t + \frac{1}{2} n_2 S |\overline{v}_{X_2}| t,$$

en donde n_1 y n_2 son los valores de concentración de las partículas respectivamente en dos volúmenes izquierdo y derecho, $|\overline{v}_{X_1}|$, $|\overline{v}_{X_1}|$ son respectivamente los valores medios de los módulos de proyecciones de velocidades de las partículas en estos vulúmenes sobre el eje X perpendicular a los orificios.

En cuanto al número de las partículas en estos volúmenes sobre el eje X perpendicular a los orificios.

En cuanto al número de las partículas N_0, las cuales en ese mismo tiempo salen de la cavidad por los orificios de superficie total 2S, es igual a

$$N_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} nS |\overline{v}_X| \Delta t,$$

en donde n es la concentración de las partículas en la cavidad; $|\overline{v}_X|$ el valor medio del módulo de proyecciones de las partículas sobre el eje X. Igualando N a N_0, obtendremos:

$$n_1|\overline{v}_{X_1}| + n_2|\overline{v}_{X_2}| = 2n|\overline{v}_X|,$$

en donde $|\overline{v}_{X_1}|$, $|\overline{v}_{X_2}|$ y $|\overline{v}_X|$ son proporcionales a las velocidades cuadráticas medias $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ y $\overline{v}$ de las partículas. Por ello se puede escribir:

$$n_1\overline{v_1} + n_2\overline{v_2} = 2n\overline{v}.$$

La velocidad cuadrática media de las partículas se determina por la fórmula

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

en donde m es la masa de la molécula; T, la temperatura de gas; k, la constante de Boltzmann.

La concentración de partículas puede ser hallada de la fórmula $p = nkT$ para la presión p del gas:

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Utilizando estas expresiones para v y n obtendremos:

$$p_1 T_1^{-\frac{1}{2}} + p_2 T_2^{-\frac{1}{2}} = 2p_n T_n^{-\frac{1}{2}}.$$

Ya que $p_1 = p_2 = p$, $T_1 = T$ y $T_2 = 2T$, entonces

$$pT^{-\frac{1}{2}} + p(2T)^{-\frac{1}{2}} = 2p_n T_n^{-\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Tampoco varía en la cavidad la energía total de las partículas. Esto significa que la energía traída por N partículas, que entran en la cavidad, se retira por N_0 partículas que abandonan la misma. Pero la energía media que toca por una partícula es igual a $\frac{3}{2}$ kT. Consiguientemente, las partículas que en el tiempo Δt vienen a parar en la cavidad traen la energía

$$E = \frac{1}{2} n_1 S|v_{X_1}| \cdot \Delta t \cdot \frac{3}{2} kT_1 + \frac{1}{2} n_2 S|v_{X_2}| \cdot \Delta t \cdot \frac{3}{2} kT_2,$$

mientras que las partículas que abandonan la cavidad se llevan en ese tiempo la energía

$$E_0 = \frac{1}{2} nS|v_x| \cdot \Delta t \cdot \frac{3}{2} kTn.$$

Igualando E a E_0 obtendremos

$$pT^{\frac{1}{2}} + p(2T)^{\frac{1}{2}} = 2p_n T_n^{\frac{1}{2}}. \qquad (2)$$

Al solucionar en conjunto las ecuaciones (1) y (2) hallaremos:

$$T_n = \sqrt{2}T, \quad p_n = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}} p.$$

273. Sobre el protón que se mueve con la velocidad $\vec{v}$ en el plano de la figura en el campo magnético de inducción $\vec{B}$ perpendicular al plano de la figura (ver la fig. 90) actúa la fuerza de Lorentz

$$F_L = evB.$$

Esta fuerza le comunica al protón la aceleración centrípeda

$$a = \frac{v^2}{R},$$

en donde R es el radio de curvatura de la trayectoria. Con arreglo a la segunda ley de Newton

$$evB = \frac{v^2}{R} m_p,$$

de donde

$$v = \frac{eBR}{m_p}.$$

La energía cinética del protón, consiguientemente, es igual a

$$W_c = \frac{m_p v^2}{2} = \frac{(eBR)^2}{2m}.$$

El radio de curvatura R de la trayectoria puede ser determinado de manera siguiente.

Destaquemos a proximidad del punto M (fig. 301) de la trayectoria dos puntos L y N. Tracemos las cuerdas LM y NM y bajemos líneas perpendiculares sobre sus centros.

El punto de intersección de los perpendiculares coincide con el centro de la circunferencia cuyo arco es el tramo LN de la trayectoria.

Determinados los radios de curvatura de la trayectoria del protón, se calcula su energía cinética W_c

$$W_c = 0{,}1 \text{ MeV}.$$

la disminución del radio de curvatura de la trayectoria evidencia sobre la disminución de la velocidad del protón (la energía del protón se gasta en la ionización del medio en el cual se mueve el mismo).

Para la reacción de fisión del núcleo X se puede escribir la siguiente ecuación:

$$^{M}_{Z}X + {}^{1}_{0}n \rightarrow 2\ {}^{4}_{2}He + 2\,{}^{1}_{1}H + k\,{}^{1}_{0}n\ .$$

De la ley de conservación de la carga se deduce que Z = 6. Por consiguiente, X consiste en el núcleo de carbono $^{12}_{6}C$ (en la cámara, por lo visto, se hallaba un isótopo estable, por ello M = 12). De la ley de conservación de la masa hallamos k:

$$k = 12 + 1 - 8 - 2 = 3.$$

Definitivamente la reacción se escribirá como sigue:

$$^{12}_{6}C + {}^{1}_{0}n \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}He + 2\,{}^{1}_{1}H + 3\,{}^{1}_{0}n.$$

274. 1. Si por la lámpara y el resistor r fluye la corriente I, la tensión U en la lámpara es igual a

$$u = \mathcal{E} - Ir. \qquad (1)$$

El gráfico U (I) de esta dependencia (fig. 302) se denomina la recta de carga. El punto de intersección de la recta de carga con la característica de voltios-amperios de la lámpara determina los valores de U y I:

$$I = 0{,}24 \text{ A}, \quad U = 1{,}6 \text{ V}.$$

2. Para que la diferencia de potenciales entre los puntos A y B sea igual a cero, la tensión en la parte inferior del reóstato debe ser igual a la tensión U en la lámpara. Esta condición será satisfecha si

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{U}{\mathcal{E} - U},$$

o

$$\frac{R}{R - R_1} = \frac{U}{\mathcal{E} - U}, \qquad (2)$$

en donde R_1 y R_2 son las resistencias de las partes inferior (según el esquema) y superior del potenciómetro ($R_1 + R_2 = R$). De aquí

$$R_1 = R\frac{U}{\mathcal{E}} = 16 \text{ Ohms}, \qquad R_2 = 24 \text{ Ohms}.$$

3. Al variar la FEM del manantial cambia la tensión en todos los elementos del circuito. Para que ΔU_{AB} sea mínima, la variación de la tensión en la lámpara debe ser igual a la variación de la tensión en la parte inferior (según el esquema) del reóstato.

La resistencia de la lámpara depende de la tensión en la misma. Con pequeñas variaciones de la tensión a proximidad del "punto operacional" de la lámpara se puede considerar que $\Delta I \sim \Delta U$. Esto corresponde al cambio de la propia característica de voltios-amperios a proximidad del punto operacional de la tangente al mismo.

Por consiguiente, cerca del punto operacional la lámpara se porta como resistor de resistencia

$$r_L = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \operatorname{ctg} \beta, \qquad (3)$$

en donde β es el ángulo de inclinación de la tangente.

El valor r_L se denomina resistencia diferencial. El mismo no determina la relación entre la tensión y la corriente en la lámpara, sino la relación entre sus variaciones.

Trazando la tangente (ver la figura 302) hallaremos que en dicho caso

$$r_L = 12{,}5 \text{ Ohms}.$$

Ya que la tensión en la lámpara se determina por la fórmula (1), entonces

$$\Delta U = \Delta \mathcal{E} - \Delta I \cdot r.$$

Pero

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{r_L}.$$

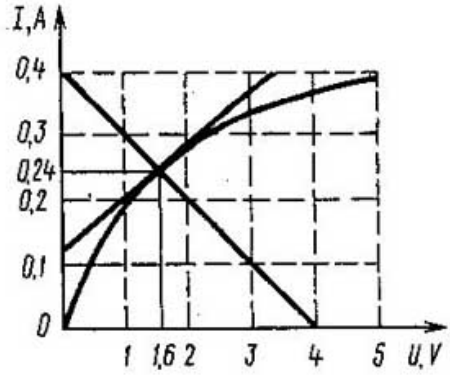


Fig. 302

Por consiguiente,

$$\Delta U = \Delta \mathcal{E} - \frac{\Delta U \cdot r}{r_L}.$$

De aquí

$$\Delta U = \Delta \mathcal{E} \frac{r_L}{r + r_L}. \qquad (4)$$

De la relación (2) se desprende que la tensión en la parte inferior del reóstato es igual a

$$U_1 = \mathcal{E} \frac{R_1}{R}.$$

Por ello

$$\Delta U_1 = \Delta \mathcal{E} \frac{R_1}{R}. \qquad (5)$$

Igualando ΔU_1 a ΔU obtendremos:

$$\frac{r_L}{r + r_L} = \frac{R_1}{R},$$

de donde

$$R_1 = 18 \text{ Ohms}.$$

Con ello $U_{AB} \approx 0{,}6$ V y al variar la FEM $\mathcal{E}$ en una magnitud que se halla dentro de los límites de $-1 \text{ V} < \Delta\mathcal{E} < 1$ V, el valor de U_{AB} varía menos que en 0,03 V. El dispositivo en cuestión puede servir de estabilizador de tensiones bajas.

275. Para determinar la densidad de metal ρ_m es preciso conocer su masa m_m y el volumen V_m:

$$\rho_m = \frac{m_m}{V_m}.$$

La masa de metal puede ser determinada con facilidad por la diferencia de masas de dos pedazos dados:

$$m_m = M_2 - M_1.$$

El volumen de metal es igual a la diferencia de los volúmenes de dos pedazos de arcilla plástica:

$$V_m = V_2 - V_1.$$

Los volúmenes V_1 y V_2 se hallan determinando en el ensayo los pesos P_1 y P_2 de cada uno de los pedazos en el agua:

$$V_1 = \frac{M_1 g - P_1}{\rho_0 g}, \qquad V_2 = \frac{M_2 g - P_2}{\rho_0 g},$$

en donde ρ_0 es la densidad del agua. Para la densidad del metal obtenemos:

$$\rho_m = \frac{(M_2 - M_1)\rho_0 g}{(M_2 - M_1) g - (P_2 - P_1)}.$$

276. Dentro de la caja se encuentra el dispositivo mecánico cuyo esquema se ofrece en la figura 93, b. El mismo consta de una barra a la cual van fijados tirantes rígidos y un muelle. El punto O divide la longitud de la barra en relación de 1:2. La investigación del dispositivo se reduce a que, hallándose fijado uno de los tirantes, se miden los desplazamientos de los demás. De esta forma, si con la posición fijada del tirante B se desplaza a cierta distancia x el extremo D, entonces el tirante C resulta inmóvil, mientras que el extremo B se desplaza a $\frac{3}{2}$ x. Si se fija la posición de los extremos A y B, se puede establecer que el enlace D es rígido, mientras que el enlace C contiene un muelle. Midiendo con el

dinamómetro la fuerza F_0 de extensión del muelle y el desplazamiento x_0 del extremo C hallamos la rigidez de este muelle:

$$k = \frac{F_0}{x_0}; \quad k = 100 \text{ N/m}.$$

La "caja negra" propuesta a los alumnos de 9no grado contenía el dispositivo cuyo esquema se muestra en la figura 93, a.

277. Adoptando que, al evacuar el aire de debajo de la campana de vidrio de volumen V_0, el cual es fácil de medir por procedimiento geométrico, la temperatura del aire no varía, con arreglo a la ley de Boyle-Mariotte se puede escribir:

$$p_0 V_0 = p_1 (V_0 + \Delta V), \quad p_1 V_0 = p_2 (V_0 + \Delta V),$$

en donde p_0 es la presión atmosférica; p_1, la presión debajo de la campana después del primer ciclo de trabajo de la bomba; p_2, la presión debajo de la campana después del segundo ciclo de trabajo de la bomba. Excluyendo a p_1 de estas igualdades y solucionando el sistema respecto a p_2 obtenemos:

$$p_2 = \frac{p_1 V_0}{V_0 + \Delta V} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + \Delta V}\right)^2.$$

Para elevar la precisión de mediciones es necesario aumentar el número n de los ciclos de trabajo de la bomba, pero no mucho, ya que en caso contrario el error crece debido a la no estanqueidad del espacio debajo de la campana. La presión debajo de la campana después del n-simo ciclo es igual a

$$p_n = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + \Delta V}\right)^n. \qquad (1)$$

Al medir la presión de gas debajo de la campana después de n y m ciclos, obtenemos dos ecuaciones y podemos hallar a ambas incógnitas: la presión atmosférica p_0 y el volumen del aire ΔV que evacúa la bomba en un ciclo.

En el equipo ofrecido el plato al vacío con campana estaba dotado de un manómetro de mercurio que medía la presión p_n debajo de la campana. Además, los alumnos disponían de un manómetro de aguja que acusaba la diferencia de presiones:

$$\Delta p = p_0 - p_n .$$

De este modo, la presión atmosférica es igual a la suma de lecturas de dos manómetros:

$$p_0 = p_n + \Delta p.$$

De la igualdad (1), conociendo p_0, hallamos ΔV:

$$\lg\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right) = \frac{1}{n} \lg \frac{p_0}{p_n}.$$

278. El método más preciso de ejecución del trabajo consistía en lo siguiente. Se armaba una instalación, con ayuda de la cual en la pantalla se obtenía una imagen de la lámpara enfocada con la lente. Seguidamente a la misma distancia entre la lente y la lámpara se colocaba detrás de la lente una cubeta de largo l con líquido. Esto tuvo por efecto el alejamiento de la imagen de la lámpara debido a la refracción doble de la luz en la cubeta, la cual puede considerarse como una placa paralela. Desplazando la pantalla a la distancia X se puede volver a obtener la imagen nítida de la lámpara en la pantalla (fig. 303). El desplazamiento x de la imagen depende del índice de refracción n del agua en la cubeta (prescindiendo del espesor de las paredes de vidrio de la cubeta) y la longitud l de la cubeta. En efecto, como se ve en la figura 304,

$$|OA| \operatorname{tg} \beta = |OC| \operatorname{tg} \alpha.$$

Pero

$$n = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \approx \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Por ello

$$|OC| = \frac{1}{n}.$$

Ya que

$$x = l - |OC| = l \frac{n-1}{n},$$

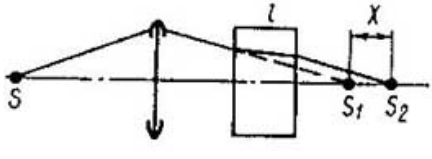


Fig. 303

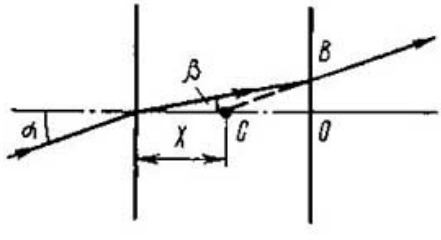


Fig. 304

entonces

$$n = \frac{1}{1 - x}.$$

279. Con ayuda del equipo disponible se podía determinar los siguientes parámetros del líquido: densidad, resistencia específica, tensión superficial.

La densidad del líquido ρ se halla por la fórmula

$$\rho = \frac{F_A}{gV},$$

en donde F_A, es la fuerza de Arquímedes que actúa en la carga de volumen V. La fuerza de Arquímedes se mide por la diferencia de lecturas del dinamómetro p_1 y p_2 que corresponden a la ubicación de la carga suspendida del mismo en el aire y en el agua:

$$F_A = P_1 - P_2.$$

El volumen del cuerpo se determina con ayuda de una probeta graduada.

La tensión superficial σ se halla por la fórmula

$$\sigma = \frac{F}{2l},$$

en donde F es la fuerza con la que se debe levantar la espiral de largo l hecha del alambre. La espiral permite aumentar la longitud del alambre y, consiguientemente, la fuerza F.

La fuerza necesaria para separar la espiral de alambre de la superficie de líquido puede ser determinada con ayuda de un cordón de goma previamente graduado según las indicaciones del dinamómetro.

Para determinar la resistencia específica ρ del líquido se arma una instalación según la figura 305. La resistencia del líquido entre los electrodos se determina por las indicaciones del amperímetro y del voltímetro:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Ya que

$$R = \frac{\rho l}{S},$$

entonces

$$\rho = \frac{RS}{l} = \frac{US}{Il},$$

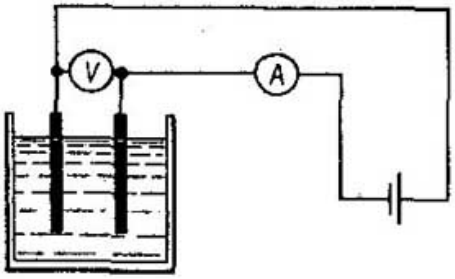


Fig. 305

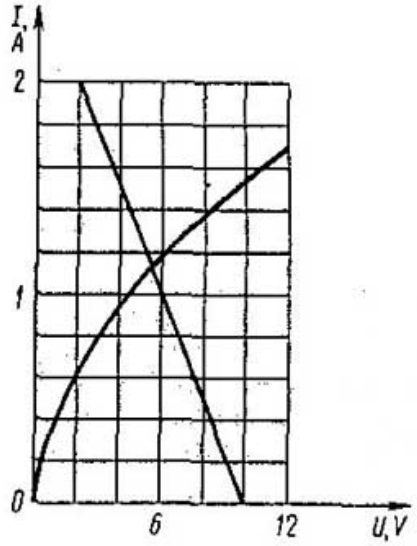


Fig. 306

en donde l es la distancia entre los electrodos y S, la superficie de la parte inmergida de la placa.

280. Al construir la recta de carga (véase el problema 274), hallaremos la tensión en la lámpara y la intensidad de corriente que fluye por la misma (fig. 306): U = 5,4 V, I = 1,1 A. Por ello

$$P = UI \approx 6 \text{ W}.$$

281. Si las masas de los fragmentos son iguales a m_1 y m_2, entonces las distancias r_1 y r_2 que median desde los fragmentos hasta el centro de masas en cualquier momento de tiempo deben ser tales que

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

El centro de masas del sistema se mueve tal como se movería la partícula de masa $M = m_1 + m_2$ bajo la acción de las fuerzas aplicadas a los cuerpos del sistema. En dicho caso el centro de masas del sistema sigue moviéndose por la misma parábola por la que se movía antes de explotar el proyectil.

No es difícil hallar las posiciones sucesivas del centro de masas. En la figura 307 se ve que el punto a es la cúspide de la parábola. Esto significa que los puntos antecedente y siguiente de ubicación del proyectil (b y b') se hallan en la misma horizontal. Por consiguiente, el centro de masas del sistema, después de explotar el proyectil, se halla en las mismas rectas horizontales que los puntos c, d, e, f, g, situadas las mismas simétricamente a estos puntos respecto a la vertical que pasa por el punto a.

Tracemos ahora la recta AB. Ella pasa por la posición e´del centro de masas y se divide por el punto e´en relación de 1:2. Consiguientemente,

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{2}.$$

Para hallar la posición del segundo fragmento tracemos líneas rectas por los puntos sucesivos, en los cuales se hallaba el primer fragmento y las posiciones respectivas del centro de masas. A continuación, desde el centro de masas en estas rectas se trazan segmentos iguales a la mitad de las distancias respectivas entre el primer fragmento y el centro de masas (ver la fig. 307).

282. El agua comienza a escurrir, cuando su fuerza de presión sobre el fondo de la cacerola equilibra la fuerza de gravedad:

$$mg = p\,(S_1 - S_2).$$

Ya que

$$p = \rho g\,(H - h),$$

entonces

$$H - h = \frac{m}{\rho\,(S_1 - S_2)}.$$

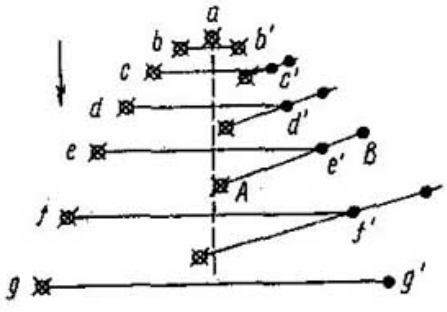


Fig. 307

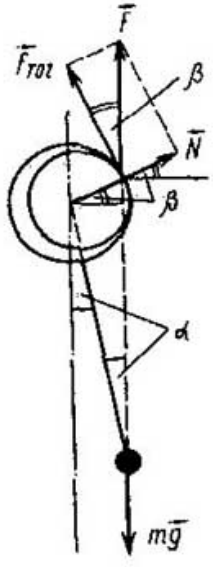


Fig. 308

o

$$H = h + \frac{m}{\rho (S_1 - S_2)}$$

283. Hallándose en equilibrio el péndulo la suma de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el mismo respecto al punto de contacto del casquillo del péndulo con el eje debe ser igual a cero. Ya que además de las fuerzas de rozamiento (F_{roz}) y la reacción normal del eje ($\vec{N}$), cuyos momentos son iguales a cero, en el péndulo actúa sólo la fuerza de gravedad, está claro que el punto de contacto ha de hallarse en la misma vertical con la carga (fig. 308). El radio trazado al punto de contacto forma con la horizontal el ángulo ß que satisface la condición

$$R \cos ß = l \operatorname{sen} \alpha, \qquad (1)$$

en donde α es el ángulo que el péndulo forma con la vertical. Por otra parte,

$$\operatorname{tg} ß = \frac{N}{F_{roz}} = \frac{1}{\mu}.$$

Por ello

$$\cos ß = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 ß}} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \qquad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) hallamos sen α:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{R}{l} \cdot \cos ß = \frac{R}{l} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

284. El géiser comienza a expulsar el agua, cuando la presión de vapor saturado en las burbujas, que se forman junto a la base del canal, llega a ser igual a la suma de la presión atmosférica p_a con la presión hidrostática de la columna de agua de altura h = 90 m:

$$p = p_a + \rho g h \approx 9{,}8 \cdot 10^5 \frac{H}{m^2}.$$

En el gráfico (fig. 99) se ve que la presión de vapores saturados adopta tal valor a la temperatura $t_1 = 180$ °C. La misma será la temperatura del agua en el recipiente.

El géiser deja de funcionar, cuando la presión de los vapores llega a ser igual a la atmosférica. Con ello la temperatura de los vapores y del agua en el recipiente será igual a $t_2 = 100$ °C. La energía, que se desprende al enfriarse el agua en el recipiente en $\Delta t = t_1 - t_2 = 80$ °C, se invierte en la evaporación de una parte del agua; el vapor formado se expulsa

afuera. Designemos con m la masa del agua evaporada y con M la masa del agua que se halla en el recipiente del géiser ($M \gg m$). Por la ley de conservación de la energía

$$cM \cdot \Delta t = \lambda m,$$

de donde

$$\frac{m}{M} = \frac{c \cdot \Delta t}{\lambda} \approx 0{,}15.$$

Durante la erupción el géiser pierde cerca del 15% del agua.

285. El helicóptero (o el modelo) se mantiene en el aire merced a la fuerza de reacción que surge, cuando el rotor lanza el chorro del aire. Sobre el helicóptero de parte del chorro arrojado, con arreglo a la tercera ley de Newton actúa una fuerza igual en módulo a la fuerza que actúa sobre el chorro. Designemos con ρ la densidad del aire, con S la superficie del chorro y con $\vec{v}$ su velocidad. En el tiempo Δt el rotor "arroja" hacia abajo el volumen de aire $V = Sv \cdot \Delta t$ de masa $m = \rho Sv \cdot \Delta t$. La variación del impulso de este aire es igual a

$$\Delta p = mv = \rho Sv^2 \cdot \Delta t.$$

Con arreglo a la segunda ley de Newton sobre el aire arrojado actúa la fuerza

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho Sv^2. \qquad (1)$$

Esta fuerza equilibra a la fuerza de gravedad que actúa sobre el helicóptero:

$$\rho Sv^2 = Mg,$$

de donde

$$v = \sqrt{\frac{Mg}{S}}.$$

En tanto, la potencia del motor es igual a la energía que se comunica al aire en 1 s:

$$N = \frac{mv^2}{2 \cdot \Delta t} = \frac{\rho Sv^2}{2}, \qquad (2)$$

o

$$N = \frac{1}{2} Mg \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}}. \qquad (3)$$

Ya que la masa M del helicóptero es proporcional al volumen de éste, o sea al cubo de sus dimensiones lineales (L^3), mientras que la superficie del chorro lanzado, al cuadrado de las dimensiones lineales (L^2), entonces de la fórmula (3) se desprende que

$$N \infty L^{7/2}.$$

Esto significa que la relación de potencias de motores del helicóptero y del modelo debe ser igual a la relación de sus dimensiones lineales en el grado de 7/2:

$$\frac{N}{N_{mod}} = \left(\frac{L}{L_{mod}}\right)^{7/2} = 10^{7/2}.$$

De ahí

$$N = N_{mod} \cdot 10^{7/2} \approx 96 \text{ kW}.$$

286. Durante la carga del condensador hasta la tensión $u = \mathcal{E}$ por el circuito pasa la carga $q = C\mathcal{E}$. El manantial de corriente (fuerzas extrañas en el manantial) ejecuta el trabajo

$$A = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2.$$

La energía acumulada en el campo electrostático del condensador

$$W_c = \frac{C\mathcal{E}^2}{2},$$

es igual sólo a una mitad de este trabajo. La segunda mitad se gasta en el calentamiento del resistor R y del propio manantial. La energía W_1 que se desprende en el resistor y la energía W_2 que condiciona el calentamiento del manantial se expresan como sigue:

$$W_1 = I^2 R \cdot \Delta t \quad \text{y} \quad W_2 = I^2 r \cdot \Delta t.$$

Por consiguiente,

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{R}{r} \quad \text{y} \quad W_1 + W_2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2},$$

De aquí hallaremos que durante la carga del condensador en el resistor R se desprende la energía

$$W_1 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} \cdot \frac{R}{R+r}.$$

Durante la descarga del condensador en el resistor, además, se desprenderá la energía adicional

$$W_k = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Consiguientemente, en el período de oscilaciones del conmutador en el resistor se desprende en suma la energía

$$W = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} \left(1 + \frac{R}{R+r}\right).$$

La potencia de corriente eléctrica en el resistor es igual a

$$N = f \cdot \frac{C\mathcal{E}^2}{2} \left(1 + \frac{R}{R+r}\right) \approx 11 \text{ W},$$

en donde f es el número de conmutaciones en 1 s. El rendimiento del circuito es igual a

$$\eta = \frac{fW}{fA} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R}{R+r}\right) \approx 0{,}545.$$

En caso de conectarse directamente el resistor R al manantial por el circuito fluirá la corriente

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

Con ello la potencia del manantial será igual a

$$N_{man} = I\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r},$$

mientras que la potencia de corriente eléctrica en el resistor

$$I^2R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

El rendimiento con ello será igual a

$$\eta' = \frac{R}{R+r} \approx 0{,}09,$$

o sea mucho menor que en el primer caso.

287. La tensión U en el "arco" al acoplarse éste en serie con un resistor autorregulador de resistencia R se determina por la fórmula

$$U = U_0 - IR, \qquad (1)$$

en donde I es la intensidad de corriente en el circuito.

Esta ecuación puede ser resuelta de forma gráfica comparando la característica de voltios-amperios del arco U = U (I) con la recta de carga U = U - IR trazadas en un plano de coordenadas (fig. 309). Los puntos a y b de intersección de la recta de carga con la característica de voltios-amperios del arco[1] U (1) determinan los valores probables de la intensidad de corriente y de la tensión en el arco. Si la recta de carga no

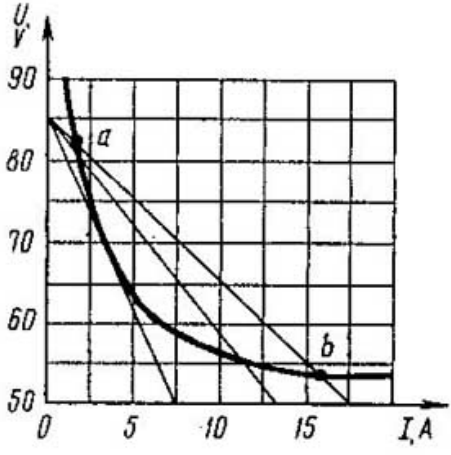


Fig. 309

tiene punto común con la característica de voltios-amperios del arco, entonces la combustión del arco es imposible. Por consiguiente, a la resistencia máxima posible R le corresponde la tangente al gráfico de U (I) y con lo cual se determina el valor máximo de la resistencia del resistor:

$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = 5 \text{ Ohms}.$$

288. Designemos con T_1 la temperatura del té y con T_2 la temperatura en la habitación. Tropezando con la pared templada las moléculas del aire contenidas en la ampolla adquieren la energía cinética[2]:

[1] El punto a corresponde a la combustión inestable y el b a la estable del arco.

[2] Naturalmente habría que tomar en consideración todos los grados de libertad de la molécula, pero para hacer la apreciación no es sustancial.

$$E_1 = \frac{3}{2} kT_1.$$

Pero tras tropezar con la pared fría la energía cinética de las moléculas llega a ser igual a

$$E_2 = \frac{3}{2} kT_2.$$

De este modo, la molécula transfiere la energía

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{2} k (T_1 - T_2).$$

El número de colisiones de las moléculas con las paredes de superficie S en el tiempo Δt es igual a

$$Z = \frac{1}{2} n |\overline{v_x}| S \Delta t, \qquad (1)$$

en donde n es la concentración de moléculas y $|\overline{v_x}|$, el valor medio del módulo de proyección de velocidad de las moléculas sobre el eje X perpendicular a la pared. Para hacer la apreciación se puede adoptar que

$$3|\overline{v_x}|^2 = v^2,$$

o

$$|\overline{v_x}| = \frac{1}{\sqrt{3}} v.$$

La velocidad cuadrática media v se determina por la fórmula

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

en donde M es la masa molar del gas y T, la temperatura media en la ampolla. Ya que los valores de T_1 y T_2 son próximos (T_1 = 363 K, T_2 = 300 K), se puede adoptar:

$$T = \frac{1}{2} (T_1 + T_2).$$

De la ecuación principal de la teoría cinética de los gases

$$p = pkT$$

expresamos la concentración de las moléculas:

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Ahora la fórmula (1) se la puede reescribir como sigue:

$$Z = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{kT}{M}} S \cdot \Delta t. \qquad (1^1)$$

Esto significa que en el tiempo Δt se transfiere la energía

$$W = Z \cdot \Delta E = \frac{3}{2} p \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} \cdot \sqrt{\frac{R(T_1 + T_2)}{2M}} S \cdot \Delta t. \qquad (2)$$

Para que 1 kg del té contenido en el termos se enfríe desde la temperatura $T_1 = 363$ K hasta la temperatura $T_1' = 243$ K debe ser transferida la energía

$$W = mc(T_1 - T_1').$$

Sustituyendo esta expresión para W en la fórmula (2), hallaremos el tiempo Δt necesario para que se enfríe el té:

$$\Delta t = \frac{2mc(T_1 - T_1')(T_1 + T_2)}{3p(T_1 - T_2)S} \cdot \sqrt{\frac{2M}{R(T_1 + T_2)}} \approx 1{,}7 \cdot 10^4 \text{s} \approx 5 \text{ h}.$$

289. La tensión U_0 a la entrada del sistema es igual a la suma de la tensión U en el arco con la tensión U_1 en el resistor. Ya que

$$U_1 = IR,$$

en donde I es la corriente en el circuito y R, la resistencia del resistor, entonces

$$U_0(I) = U(I) + IR.$$

La tensión U en el arco aminora al ir aumentando I y con grandes corrientes eléctricas tiende al valor constante c. Esto significa que con grandes corrientes la dependencia $U_0(I)$ debe llegar a ser lineal:

$$U_0 = IR + c,$$

siendo la tangente del ángulo de inclinación del gráfico de $U = U(I)$ igual a R:

$$\frac{\Delta U_0}{\Delta I} = R.$$

En la figura 310 se ve que con $I > 15$ A el gráfico de U_0 (I) es prácticamente una recta. De la figura hallamos:

$$R = \frac{25}{17{,}5} \text{ Ohms} \approx 1{,}4 \text{ Ohms}.$$

Para construir la característica de voltios-amperios del arco de U (I) hace falta, como se muestra en la figura 310, de los valores de U_0 (I) restar los valores correspondientes

$$U_R = IR.$$

A continuación el problema se soluciona del mismo modo que el problema 287. Para el valor máximo de la resistencia del resistor hallamos:

$$R_{max} \approx 5 \text{ Ohms}.$$

290. Aunque el condensador se carga a partir del manantial B_1, cuya FEM es $\mathcal{E}_1$, la tensión en el condensador, debido a la presencia de la bobina de inductancia, puede ser mayor que $\mathcal{E}_1$. Esto se debe a que, cuando la tensión en el condensador es igual a $\mathcal{E}_1$ y la FEM de autoinducción $\mathcal{E}_a$ en la bobina es igual a cero (ya que $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_a = \mathcal{E}_1$), la intensidad de corriente en la bobina es máxima y en la bobina se ha acumulado la energía

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

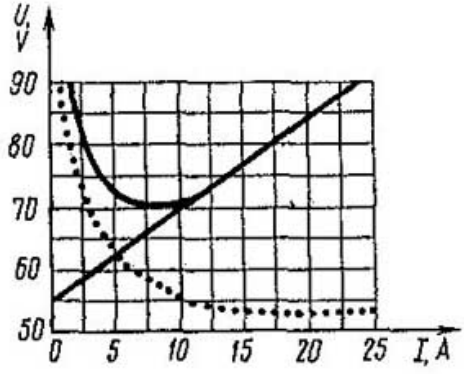


Fig. 310

En efecto, tal que

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt},$$

entonces

$$\frac{dL}{dt} = 0,$$

y, por consiguiente, la intensidad de corriente en la bobina es máxima. A continuación la intensidad de corriente en la bobina disminuye y en la misma se excita la FEM de autoinducción orientada igual que $\mathcal{E}_1$. En virtud de ello el condensador sigue cargándose hasta que se consuma la energía acumulada antes en la bobina.

Si no existiesen el diodo ni el manantial B_2, el condensador se cargaría hasta la tensión que se puede hallar de la manera siguiente. El trabajo del manantial

$$A = q\mathcal{E}_1$$

es igual a la suma de energías acumuladas en la bobina W_{bob} y en el condensador:

$$q\mathcal{E}_1 = \frac{CU^2}{2} + W_{bob}.$$

La tensión en el condensador es máxima con $W_{bob} = 0$. Con ello

$$q = CU_{max}.$$

Por ello

$$CU_{max}\,\mathcal{E}_1 = \frac{CU^2_{max}}{2},$$

de donde

$$U_{max} = 2\mathcal{E}_1.$$

Si $\mathcal{E}_2 < 2\mathcal{E}_1$, el diodo se "abre", cuando la tensión en el condensador llegue a ser igual a $\mathcal{E}_2$; con ello la corriente fluirá por el diodo y el manantial B_2. Con ello el condensador dejará de cargarse y la tensión en el mismo permanecerá igual a $\mathcal{E}_2$. La corriente cesará, cuando llegue a ser igual a cero la energía acumulada en la bobina.

Designemos con q_1 la carga que haya pasado para ese tiempo a través del manantial B_1, y con q_2 la carga que haya pasado por el manan-

tial B_2. Entonces de la ley de conservación de la energía se desprende que

$$q_1\mathcal{E}_1 = \frac{C\mathcal{E}_2^2}{2} + q_2\mathcal{E}_2 \qquad (1)$$

Ya que la diferencia $q_1 - q_2$ es igual a la carga del condensador $q = CU$, entonces

$$q_1 = CU + q_2.$$

Al sustituir esta expresión para q_1 en la ecuación (1), obtendremos:

$$C\mathcal{E}_2\mathcal{E}_1 + q_2\mathcal{E}_1 = \frac{C\mathcal{E}_2^2}{2} + q_2\mathcal{E}_2,$$

de donde

$$q_2 = \frac{C\mathcal{E}_2}{2}\,\frac{2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}.$$

291. Este problema se soluciona igual que el problema 216. Si se adopta que el tamaño de la cara es de 22 cm, el ancho de la palma de unos 9 cm, la distancia entre la cara y las palmas de las manos extendidas es de 50 cm y que el punto resultado nítido en la foto se halla en el medio entre la cara y las palmas, se puede hallar:

$$1)\ F \approx 9\ \text{cm},\quad 2)\ x \approx 50\ \text{cm},\quad 3)\ l \approx 40\ \text{cm},$$

4) el objetivo de la cámara fotográfica está diafragmado hasta $d = 2{,}2$ mm. El orifico relativo del objetivo (ralación entre el diámetro del orificio y la distancia focal) es igual a 1/40.

292. El método de comparación de la densidad de distintos líquidos se funda en la dependencia entre la fuerza de Arquímedes F y la densidad del líquido. Si en dos líquidos de densidades ρ_1 y ρ_2 se inmerge sucesivamente un mismo cuerpo sólido de volumen V, en el mismo actuarán las fuerzas de Arquímedes

$$F_1 = \rho_1 Vg, \qquad F_2 = \rho_2 VG.$$

De aquí

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{F_1}{F_2}. \qquad (1)$$

Al equilibrar las cargas en la palanca establecemos que las masas de las mismas son iguales (los brazos de la palanca resultan iguales). Si una de las cargas se inmerge en el líquido (fig. 311, a, b), entonces para equilibrar la palanca es preciso escoger una relación determinada de los brazos. En el caso de la inmersión en el primer líquido (fig. 311, a) la condición de equlibrio de la palanca se escribirá como sigue:

$$(mg - F_1)\, l = mgl_1, \qquad (2)$$

en donde l y l_1 son los brazos de fuerzas $m\vec{g} + \vec{F_1}$ y $m\vec{g}$. Al inmergir una misma carga en otro líquido (fig. 311, b) el equilibrio de la palanca puede ser restablecida al variar el brazo de una de las fuerzas:

$$(mg - F_2)\, l = mgl_2, \qquad (3)$$

en donde l y l_2 son los brazos de las fuerzas $m\vec{g} + \vec{F_2}$ y $m\vec{g}$.

De las expresiones (2) y (3) obtendremos:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l - l_1}{l - l_2},$$

en donde

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{l - l_1}{l - l_2}. \qquad (4)$$

293. Con ayuda de hojas de papel blanco y de papel carbón se registra el lugar de caída de la bola tras bajar rodando por el canalón libre

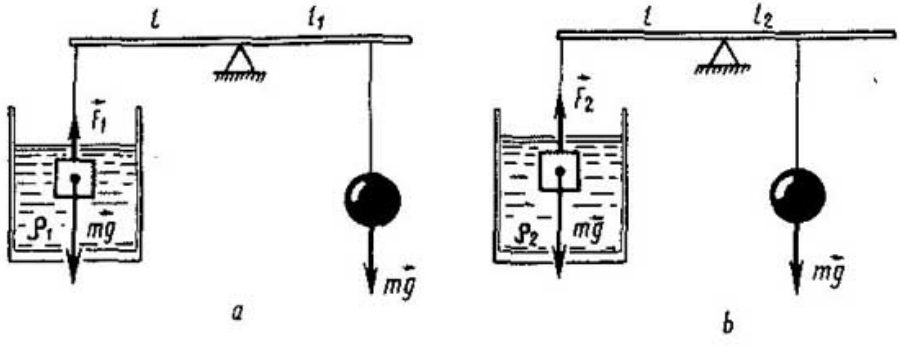


Fig. 311

y se mide la distancia de vuelo s de la bola (fig. 312, a). De ahí se desprende que la velocidad de la bola en el momento inicial de su vuelo libre se determina por la fórmula

$$v = \frac{s}{t},$$

en donde t es el tiempo de caída de la bola.

Al colocar sobre el tramo horizontal del canalón la segunda bola (de masa igual o menor) se miden las distancias de vuelo s_1 y s_2 de ambas bolas después de su colisión (fig. 312, b). Las velocidades de las bolas después de la colisión son iguales a

$$v_1 = \frac{s_1}{t}, \quad v_2 = \frac{s_2}{t}.$$

Ya que el tiempo de caída de las bolas en todos los ensayos es igual, entonces para verificar la ley de conservación del impulso es suficiente comprobar cómo se cumple la relación

$$m_1 s = m_1 s_1 + m_2 s_2, \tag{1}$$

en donde m_1 y m_2 son las masas de las bolas que chocan.

Para sacar la conclusión sobre el cumplimiento o incumplimiento de la ley de conservación del impulso en este ensayo hace falta apreciar los errores de mediciones de las distancias s, s_1 y s_2 (las masas de las bolas se midieron con una precisión mucho mayor). Hay que tener en cuenta que en el ensayo no se toma en consideración la rotación de las bolas que surge al rodar éstas por el canalón. En caso de chocar las bolas de masa igual, la bola en movimiento ha de detenerse debido a ceder todo su impulso a la segunda bola. No obstante, en virtud de la rotación, la

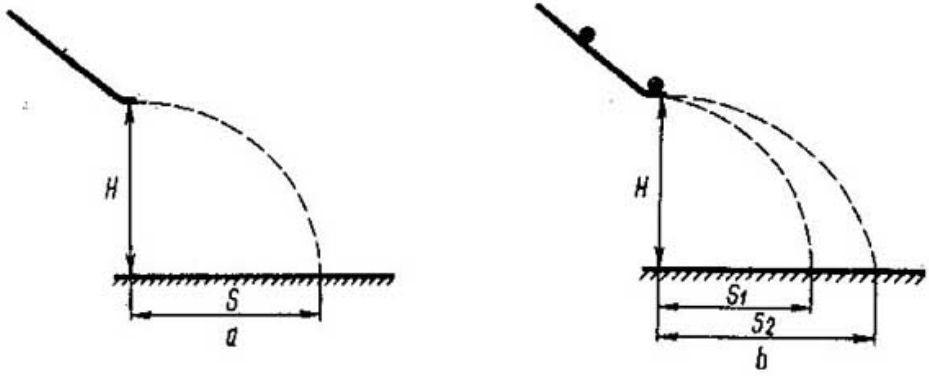


Fig. 312

misma bola sigue moviéndose después de la colisión por el tramo horizontal del canalón. Caso de utilizarse bolas de acero lisas, la ley de conservación del impulso se cumple dentro de los límites de errores de mediciones, ya que tales bolas en gran medida no ruedan, sino deslizan por el canalón.

294. Las observaciones principales para este problema en lo esencial son las mismas que las del problema 293. La comprobación de la ley de conservación de la energía se reduce a la comprobación del cumplimiento de la igualdad

$$m_1 s^2 = m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2.$$

En función del material de la bola y de la calidad de su tratamiento la misma pasa distintos trayectos en el régimen de deslizamiento y de rodamiento. Cuanto mayor es el deslizamiento de la bola durante su movimiento por el canalón tanto mejor se cumplen las leyes de conservación del impulso y de la energía en este ensayo. El deslizamiento mayor lo tiene la bola de acero y el menor la de aluminio. Es fácil convencerse de ello dejando bajar de una misma altura las bolas de acero, de plástico y de aluminio: con ello la bola de acero vuela mucho más lejos que otras.

295. Las mediciones efectuadas con asistencia del ohmímetro arrojaron los siguientes valores de resistencias:

$$R_{12} = 2 \text{ kOhms}, \qquad R_{21} = 30 \text{ kOhms},$$
$$R_{13} = 8 \text{ kOhms}, \qquad R_{31} = 45 \text{ kOhms},$$
$$R_{23} = 8{,}5 \text{ kOhms}, \qquad R_{32} = 15 \text{ kOhms}.$$

Al medir la resistencia del diodo (igual que el de la caja) en el sentido directo (en el régimen anterior del ohmímetro) se obtuvo el valor de 2 kOhms, mientras que en el sentido inverso el ohmímetro acusa ∞.

De los datos obtenidos se desprende que, en caso de ser iguales los resistores, el dispositivo contenido en la "caja negra" posee el esquema eléctrico mostrado en la figura 106. Partiendo de los resultados del ensayo es fácil determinar las resistencias de los resistores:

$$R = \frac{R_{21}}{2} \approx \frac{R_{31}}{3} = R_{32} \approx 15 \text{ kOhms}.$$

Ya que el diodo es un elemento alineal, su resistencia varía sustancialmente en diferentes regímenes. Por consiguiente, había que medir la resistencia del diodo en el sentido directo conectándolo sucesivamente a diferentes bornes de la "caja negra"; con ello se determina la resistencia del diodo en el régimen en el cual se efectúa la medición.

296. Para determinar la capacidad del condensador C_1 se acopla el generador acústico a los bornes 1 y 2 y se mide la tensión a la salida del

generador y la intensidad de corriente en el circuito del condensador C_1. Conociendo la frecuencia de variación de corriente ν se puede determinar la capacidad del condensador C_1:

$$I = \frac{U}{X_L} = 2\pi\nu C_1 U, \quad C_1 = \frac{I}{2\pi\nu U}.$$

Estas mediciones deben efectuarse con frecuencias bajas, ya que con frecuencias altas el generador se cortocircuita por pequeña capacitancia del condensador C_1 y se produce la disminución de la tensión de salida del generador.

Al acoplar el generador a los bornes 2 y 3 y el avómetro como amperímetro se determina con qué frecuencia ν_1 la intensidad de corriente es mínima.

Es notorio que

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{LC_2}.$$

Cerrados los bornes 1 y 3 se obtiene el circuito eléctrico mostrado en la figura 313. Al determinar para este circuito la frecuencia ν_2 de variación de la corriente, con la cual la intensidad de corriente es mínima, se puede escribir:

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{L(C_1 - C_2)}.$$

De dos ecuaciones resultadas hallamos L y C_2. Con tal metodología el amperímetro sirve sólo de indicador para detectar el mínimo de corriente; las mediciones directas de la intensidad de corriente y de la tensión no se efectúan, lo que aminora sustancialmente los errores del ensayo. Además, ambas frecuencias se miden con pequeñas corrientes, a efecto

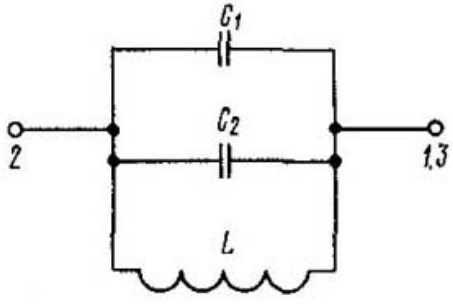


Fig. 313

de lo cual la tensión a la salida del generador prácticamente no cambia. La inductancia de la bobina (del conductor arollado sobre el anillo de ferrita) con tal metodología tampoco varía.

La resistencia activa de la bobina se mide con ayuda del ohmímetro acoplado a los bornes 2 y 3 (ver la fig. 313).

297. Si se mira en los orificios 1, 2, 3, entonces al tapar los orificios 4, 5, 6 no se descubren algunas variaciones. Esto quiere decir sobre la presencia en la caja de cierto obstáculo para los rayos lunimosos. En virtud de que al observar por uno de los orificios se ven otros dos, se puede sacar la conclusión de que este obstáculo es un espejo. Para determinar el tipo del espejo y sus características hace falta seguir la trayectoria de los rayos reflejados del mismo. Con este fin con ayuda de alfileres se trazan las direcciones, desde las cuales por un orificio se observan otros dos. La intersección de direcciones correspondientes (líneas intermitentes en la figura 314) proporciona la posición de tres puntos del espejo por un lado y de tres puntos del espejo por el otro.

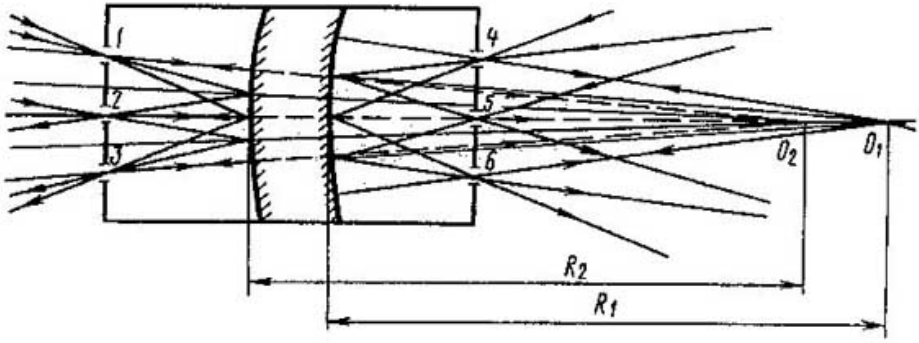


Fig. 314

Después de ello se determinan las direcciones por las que se ven los orificios, a través de los cuales se efectúa la observación. Con este objetivo el alfiler se coloca de tal modo que su imagen, el alfiler mismo, el orificio y el ojo se encuentren en una recta. Esto es posible si el rayo pasa por el centro óptico del espejo. Al hacer similares construcciones de otros dos orificios hallaremos el centro óptico del espejo en el punto de intersección de las rectas trazadas. En la figura 314 se ve que en un caso estas rectas convergen (espejo cóncavo), mientras que en el otro divergen (espejo convexo). Midiendo las distancias desde los puntos obtenidos O y O' hasta el espejo determinamos los valores buscados de los radios de curvatura de las superficies especulares.

298. La columna de humo lanzada por la locomotora en el punto A en el tiempo t será corrida por el viento al punto C. Con ello

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u}t,$$

en donde $\vec{u}$ es la velocidad del viento (fig. 315). Pero al cabo del tiempo t la locomotora estará situada en el punto B. El avance del tren es igual a

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v}t,$$

en donde v es la velocidad del tren. Es notorio que la columna de humo está orientada a lo largo del vector

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

o, lo que da lo mismo, a lo largo del vector

$$\vec{u} - \vec{v}.$$

Para convencerse de ello es suficiente demostrar que la columna de humo lanzada por la locomotora en un punto eventual D en el tramo AB, para aquel momento cuando el tren estará situado en el punto B, será desplazada por el viento a la línea BC. Tal que

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|KD|}{|DB|} = \frac{u}{v}$$

y AC $\parallel$ KD, los triángulos ABC y DBK son símiles. Por consiguiente, los ángulos ABC y DBK son congruentes y el punto K se halla en la línea BC.

Ahora es fácil hallar la velocidad del viento. Tracemos en una escala arbitraria el vector $\vec{v}_1$. Seguidamente desde el origen O del vector $\vec{v}_1$ tracemos en la misma escala el vector $\vec{v}_2$. De los extremos de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tracemos líneas rectas paralelas a las columnas correspondientes de humo (fig. 316). El punto M de intersección de estas rectas lo enlacemos con el punto O. En la escala seleccionada precisamente $\overrightarrow{OM}$ constituye el vector de la velocidad del viento. En efecto, el vector $\overrightarrow{OM} - \vec{v}_1$ está orientado a lo largo de la columna de humo que arrastra la primera locomotora, mientras que el vector $\overrightarrow{OM} - \vec{v}_2$, a lo largo de la

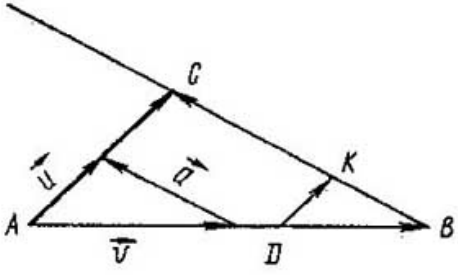


Fig. 315

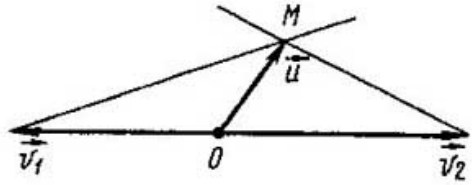


Fig. 316

columna de humo de la segunda. Al medir con ayuda de la regla la longitud del vector $\overrightarrow{OM}$ hallaremos el módulo de la velocidad del viento. Es igual a 35 km/h.

299. Designemos con $\vec{v}_0$ la velocidad del observador respecto a la tierra y con $\vec{v}_1$, la velocidad del cuerpo en el momento, cuando éste por primera vez atravesó la trayectoria del observador. En el sistema de lectura que se mueve uniformemente con la velocidad $\vec{v}_0$ respecto a la tierra, el observador se halla inmóvil, mientras que el cuerpo en el momento de cruzar por primera vez la trayectoria del observador tiene la velocidad

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0.$$

Ya que este sistema de lectura se mueve respecto a la tierra de manera uniforme, entonces el cuerpo en la misma se mueve con la misma aceleración constante $\vec{g}$ que en el sistema de lectura fijo respecto a la tierra. Por consiguiente, en este sistema de lectura en movimiento el cuerpo se mueve por una parábola. Pero según los datos del problema el cuerpo atraviesa la trayectoria de movimiento del observador dos veces a una misma distancia de éste, siendo ambas veces delante de él. Esto significa que en el sistema de lectura en movimiento, el cuerpo atraviesa la línea recta por la que se mueve el observador en un mismo punto. Esto es posible si en el sistema de lectura en movimiento el cuerpo se mueve por la recta vertical (el vector $\vec{v}$ es vertical).

Escribiremos la ecuación de movimiento del cuerpo en el sistema de lectura en movimiento:

$$y = y_0 + vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Con $t = 0$ el cuerpo atraviesa la trayectoria del observador por primera vez y con $t = \tau$, por segunda. Consiguientemente, con $t = 0$ y $t = \tau$ los valores de las coordenadas del cuerpo coinciden:

$$y_0 = y_0 + v\tau - \frac{g\tau^2}{2}.$$

De ahí

$$v = \frac{g\tau}{2}.$$

Por ello la ecuación de movimiento del cuerpo puede ser escrita de forma siguiente:

$$y = y_0 + \frac{g\tau^2}{2}t - \frac{gt^2}{2}.$$

Ahora hallemos la relación de los trayectos que recorre el cuerpo en lapsos sucesivos iguales de tiempo τ. Con $t = n\tau$

$$y_n = y_0 + n\frac{g\tau^2}{2} - n^2\frac{g\tau^2}{2}.$$

Por ello

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = ng\tau^2,$$

o

$$\Delta y_0 = 0,\ \Delta y_1 = g\tau^2,\ \Delta y_2 = 2g\tau^2,\quad \ldots,\ \Delta y_n = ng\tau^2.$$

De aquí hallamos la relación de los trayectos recorridos por el cuerpo después de la segunda intersección de la trayectoria del observador en sucesivos lapsos de tiempo τ:

$$\Delta y_1 : \Delta y_2 : \Delta y_3 \ldots = 1 : 2 : 3 \ldots .$$

300. Al cabo de trasegar el agua de la primera vasija a la segunda y de la segunda a la primera los valores de la masa del agua en las vasijas quedaron las mismas, pero la temperatura del agua en la primera vasija bajó en $\Delta t_1 = 1$ °C. Esto equivale a la cantidad de calor que cede el agua contenida en la primera vasija

$$Q_1 = c_a m_1 \cdot \Delta t_1.$$

Con arreglo a la ley de conservación de la energía esta cantidad de calor fue transferida al agua en la segunda vasija. Por consiguiente,

$$c_a m_2 \cdot \Delta t_2 = Q_1 = c_a m_1 \cdot \Delta t_1,$$

en donde Δt_2 es la variación de la temperatura del agua en la segunda vasija, $m_1 = 5$ kg, la masa del agua en la primera vasija y $m_2 = 1$ kg, la masa del agua en la segunda vasija. De esta ecuación hallaremos:

$$\Delta t_2 = \frac{m_1}{m_2}\Delta t_1 = 5\,\Delta t_1 = 5\ ^\circ\text{C}.$$

De este modo, al cabo de trasegar a la segunda vasija la masa Δm de agua de la primera (con la temperatura $t_1 = 60$ °C), la temperatura del agua en la segunda vasija llegó a ser igual a $t_2 = 25$ °C. Según la ecuación del equilibrio térmico $\Delta m c_a (t_1 - t'_2) = m_2 c_a (t'_2 - t_2)$.
De aquí

$$\Delta m = m_2 \frac{t_2' - t_2}{t_1 - t_2'} = \frac{1}{7} \text{ kg}.$$

301. La tensión U_1 entre los puntos b y a (fig. 317) se determina por la fórmula

$$U = I_2 r,$$

en donde r es la resistencia interna del amperímetro. Al mismo tiempo

$$U_1 = Ir + I_3 r.$$

Por ello

$$Ir + I_3 r = I_2 r.$$

Esto significa que

$$I_3 = I_2 - I_1 = 1\text{A}.$$

Por el amperímetro A_4 fluye la corriente

$$I_4 = I_2 + I_3 = 4\text{A},$$

mientras que por el resistor la corriente

$$I = I_1 - I_3 = 1 \text{ A}.$$

La tensión entre los puntos c y d es igual a IR. Al mismo tiempo es igual a $I_3 r + I_4 r$. Por consiguiente,

$$IR = (I_3 + I_4) r.$$

De aquí

$$\frac{r}{R} = \frac{I}{I_3 + I_4} = \frac{1}{5}.$$

302. Ante todo hallemos la velocidad del viento como se muestra en la solución del problema 298. Luego desde la punta M del vector $\vec{u}$ de la velocidad del viento (ver la fig. 316) tracemos una línea recta paralela a la columna de humo que arrastra la tercera locomotora. La intersección de esta recta con la recta por la que se mueve la locomotora determina la velocidad $\vec{v}_3$ de la tercera locomotora (fig. 318). Conociendo la escala en la cual están construidos todos los vectores de las velocidades es fácil hallar el módulo del vector $\vec{v}_3$. Es igual a 20 km/h.

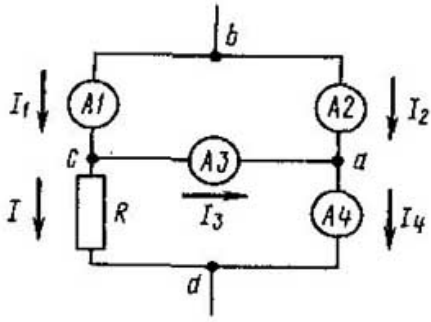


Fig. 317

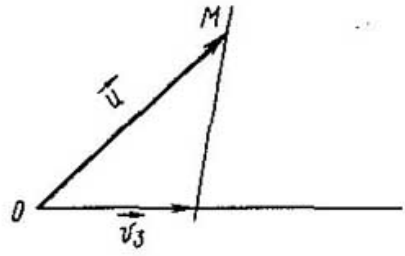


Fig. 318

303. En el momento cuando el hilo se tiense, la bola de masa 2m tendrá la velocidad v. Con arreglo a la ley de conservación de la energía

$$\frac{2mv_0^2}{2} - \frac{2mv^2}{2} = 2mgl.$$

De aquí

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gl}.$$

En el momento de tensión del hilo las bolas actúan entre sí por medio del hilo. Suponiendo que el tiempo de esta interacción es breve se puede aplicar las leyes de conservación del impulso y de la energía

$$2mv = 2mu_1 + mu_2,$$

en donde u_1 y u_2 son las velocidades respectivamente del primer y segundo cuerpos después de la interacción.

$$\frac{2mv^2}{2} = \frac{2mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}.$$

De este sistema de ecuaciones hallamos:

$$u_1 = \frac{1}{3}v, \quad u_2 = \frac{4}{4}v.$$

Al tensarse el corto tiempo el hilo, las bolas se mueven con la aceleración constante $\vec{g}$. Escribiremos las ecuaciones de su movimiento en proyección sobre el eje vertical Y:

$$y_1 = l + u_1 t - \frac{gt^2}{2}$$ para la primera bola,

$$y_2 = u_2 t - \frac{gt^2}{2}$$ para la segunda bola.

En el momento t_1 de colisión de las bolas tiene lugar la igualdad $y_1 = y_2$, o

$$l + u_1 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = u_2 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}.$$

De aquí hallaremos el tiempo t_1 de movimiento de las bolas a partir del momento de tensarse el hilo hasta la colisión:

$$t_1 = \frac{l}{u_2 - u_1} = \frac{l}{v} = \frac{l}{\sqrt{v_0^2 - 2gl}}.$$

304. Adoptemos que el recipiente se llena rápido y de esta manera se puede prescindir del cambio térmico con el medio ambiente. Dada esta condición, la variación de la energía interna del gas, que llena el recipiente, es igual al trabajo de las fuerzas de la presión atmosférica exterior. Ya que el recipiente primero está bombeado y la presión atmosférica "empuja" al gas en el recipiente, este trabajo se determina por la fórmula

$$A = p_0 V_0,$$

en donde V_0 es el volumen del recipiente y p_0, la presión atmosférica exterior. La variación de la energía interna del gas es igual a

$$\Delta U = \nu \frac{3}{2} R (T_1 - T_0),$$

en donde ν es el número de moles de gas en el recipiente. Ya que fuera del recipiente el gas ocupaba el mismo volumen V_0, entonces según la ecuación del estado de los gases

$$\nu = \frac{p_0 V_0}{RT_0}$$

Por consiguiente,

$$\Delta U = \frac{3}{2} \frac{p_0 V_0}{RT_0} R (T_1 - T_0) = p_0 V_0.$$

De esta ecuación hallamos:

$$T_1 = T_0 + \frac{2}{3} T_0 = \frac{5}{3} T_0 .$$

305. Designemos con q la cantidad de calor que cede el hornillo en 1 s. Entonces en el lapso breve de tiempo $\Delta\tau$ el hornillo cede la cantidad de calor

$$Q = q \cdot \Delta\tau,$$

la que se gasta en calentar la cacerola y el líquido y transferir calor al medio ambiente. Con pequeño valor de $\Delta\tau$ la temperatura de la cacerola y del líquido varía en un valor pequeño Δt y se puede considerar que la transferencia de calor Q_1 es proporcional a la diferencia de temperatura de la cacerola (t) y del medio ambiente (t_0), así como al tiempo $\Delta\tau$:

$$Q_1 = \alpha(t - t_0) \cdot \Delta\tau,$$

en donde α es el coeficiente de proporcionalidad que se determina por las condiciones de calentamiento y las dimensiones de la cacerola. Escribamos la ecuación del equilibrio térmico para el caso, cuando en la cacerola se halla agua:

$$q \cdot \Delta\tau = c_a m_a \cdot \Delta t + c \cdot \Delta t + \alpha (t - t_0) \cdot \Delta\tau, \qquad (1)$$

en donde $c_a = 4{,}2 \cdot 10^3$ J/(kg·K) es el calor específico del agua y m_a = 0,5 kg, la masa del agua.

En el caso, cuando sobre el hornillo se halla la cacerola con alcohol a la misma temperatura "inicial" t, en el mismo tiempo $\Delta\tau$ de calentamiento la temperatura de la cacerola y del alcohol varía en cierto valor Δt_1 y la ecuación de equilibrio térmico adopta el aspecto que sigue

$$q \cdot \Delta\tau = c_{al} m_{al} \cdot \Delta t_1 + c \cdot \Delta t_1 + \alpha (t - t_0) \cdot \Delta\tau, \qquad (2)$$

en donde c_{al} es el calor específico del alcohol y m_{al} = 0,7 kg, la masa del alcohol. Igualando las partes derechas de las igualdades (1) y (2) y dividiéndolas en $\Delta\tau$, obtendremos:

$$c_a m_a \frac{\Delta t}{\Delta\tau} + c \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = c_{al} m_{al} \frac{\Delta t_1}{\Delta\tau} + c \frac{\Delta t_1}{\Delta\tau}. \qquad (3)$$

De aquí

$$c_{al} = \frac{\Delta t/\Delta\tau}{\Delta t_1/\Delta\tau} \cdot \frac{c_a m_a + c}{m_{al}} - \frac{c}{m_{al}}. \qquad (4)$$

La relación $\Delta t/\Delta\tau$ con $\Delta\tau \to 0$ tiende al valor de la tangente del ángulo de inclinación tg φ_1 de línea tangente al gráfico de dependencia entre la temperatura del contenido de la cacerola y el tiempo en el punto correspondiente a la temperatura t. Al determinar por el gráfico los valores de tg φ_1 y tg φ_2 (fig. 319) y al sustituirlos en lugar de las relaciones $\Delta t/\Delta\tau$ y $\Delta t_1/\Delta\tau$ en (4), obtendremos:

$$c_{al} \approx 2{,}4 \cdot 10^3 \text{ J/ (kg} \cdot \text{K)}.$$

Ahora hallemos el calor específico de vaporización del alcohol. Con arreglo a la ley de conservación de la energía

$$q \cdot \Delta\tau_1 = \Delta m \cdot \lambda + \alpha\,(t_e - t_0) \cdot \Delta\tau_1, \qquad (5)$$

en donde Δm es la masa del alcohol evaporado; λ, el calor específico de vaporización del alcohol; $t_e = 78$ °C, la temperatura de ebullición del alcohol (se determina por el gráfico). De la ecuación (5) tenemos:

$$\lambda = \frac{q - \alpha\,(t_e - t_0)}{\Delta m/\Delta\tau_1},$$

en donde la velocidad de evaporización del alcohol es igual a

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau_1} = \frac{0{,}35 \text{ kg}}{45 \text{ min}} = 0{,}012 \text{ kg/min}.$$

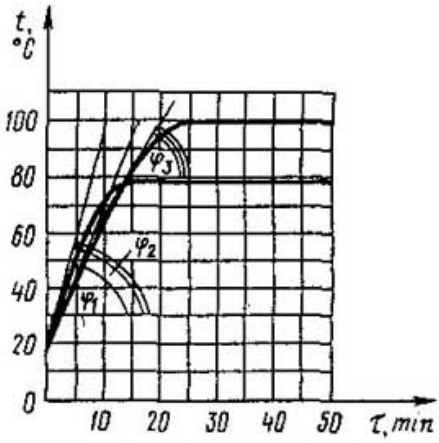


Fig. 319

De la igualdad (1), al sustituir en la misma el valor $t = t_e$ y tomando en consideración que la relación $\frac{\Delta t}{\Delta \tau}$ tiende a la tangente de inclinación de la línea tangente al gráfico de la función $t(\tau)$ para la cacerola con agua en el punto $t = 78$ °C, hallamos la transferencia de calor:

$$\alpha (t_e - t_0) = q - (c_a m_a + c) \operatorname{tg} \varphi_3.$$

Tomando esto en consideración, la expresión hallada para el calor específico de vaporización del alcohol puede ser escrita como sigue:

$$\lambda = \frac{c_a m_a + c}{\Delta m / \Delta \tau_1} \operatorname{tg} \varphi_3.$$

Al sustituir en esta fórmula los valores de todas las magnitudes conocidas y el valor de $\operatorname{tg} \varphi_3$ hallado con el gráfico, obtendremos:

$$\lambda \approx 900 \text{ kJ/kg}.$$

306. Si primero ambas sustancias contenidas en el recipiente se hallan en estado gaseoso, la presión en el mismo es igual a la suma de presiones parciales de los gases:

$$p = p_1 + p_2,$$

donde

$$p_1 = \nu_1 \frac{RT}{V_0}, \quad p_2 = \nu_2 \frac{RT}{V_0}.$$

Al sustituir los valores de las magnitudes $(\nu_1 = \nu_2) = 0{,}05$ mol, $V_0 = 10^{-2}$ m^3 y $T = 313$ K), hallaremos:

$$p_1 = p_2 = 1{,}3 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

De este modo, $p_1 > p_{S1}$ y $p_2 < p_{S2}$. Por consiguiente, la segunda sustancia se halla en estado gaseoso y su presión parcial primero es igual a p_2; en cuanto a la primera sustancia, la misma se halla parcialmente condensada y su presión parcial es igual a p_{S1}. La presión en el recipiente primero es igual a

$$p_0 = p_{S1} + p_2 \approx 2 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

Al comprimirse los gases la presión del primero permanecerá invariable e igual a p_{S1}. Y la presión del segundo gas en el caso de la compresión isotérmica crecerá hasta que llegue a ser igual a p_{S2}. Esto ocu-

rrirá con el volumen de recipiente V_1 que satisface la ecuación de Mendeleev – Clapeyron:

$$p_{S2}V_1 = \nu_2 RT,$$

o sea con

$$V_1 = \frac{\nu_2 RT}{p_{S2}} \approx 7{,}6.$$

Consiguientemente, la presión en el recipiente isotérmicamente aumenta al disminuir el volumen del recipiente hasta 7,6 l. A continuación la presión en el recipiente permanece invariable, igual a

$$p = p_{S1} + p_{S2} = 2{,}4 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

El gráfico de dependencia de p (V) se muestra en la figura 320.

Hallemos la masa del líquido, cuando el volumen del recipiente es igual a

$$V_2 = \frac{1}{3} V_0 = 3\frac{1}{3} \text{ l}.$$

Ya que los volúmenes de los líquidos son pequeños en comparación con los volúmenes de los gases, los números de moles de las sustancias que se hallan en estado gaseoso son iguales respectivamente a

$$\nu_1^1 = \frac{p_{S1}V_2}{RT} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ mol}, \quad \nu_2^1 = \frac{p_{S2}V_2}{RT} 2{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ mol}.$$

Por consiguiente, en estado líquido se halla $\nu_1 - \nu_1^1 = 4{,}1 \cdot 10^{-2}$ mol de primera sustancia y $\nu_2 - \nu_2^1 = 2{,}8 \cdot 10^{-2}$ mol de segunda sustancia. Por ello la masa del líquido en el recipiente es igual a

$$m = (\nu_1 - \nu_1^1) M_1 + (\nu_2 - \nu_2^1) M_2 \approx 2{,}03 \text{ g}.$$

307. Designemos con U_0 la tensión en la red de contacto. Moviéndose el tranvía por el tramo horizontal de la vía, la potencia consumida por el motor a partir de la red es igual a $U_0 I_1$. Una parte de esta potencia se pierde, o sea se invierte en el calentamiento del arrollamiento del motor y de los conductores de contacto. Esta parte de la potencia es igual a $I_1^2 R$ (en donde R es la resistencia total del circuito). Por ello el rendimiento es igual a

$$\eta = \frac{U_0 I_1 - I_1^2 R}{U_0 I_1} = 1 - \frac{I_1 R}{U_0}. \qquad (1)$$

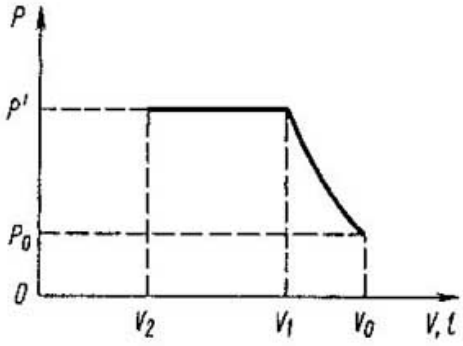


Fig. 320

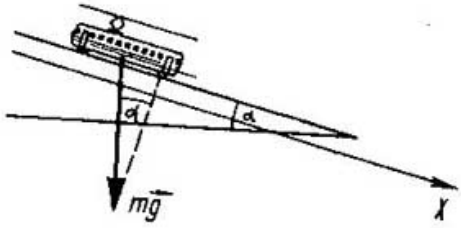


Fig. 321

Ya que el tranvía se mueve con una velocidad constante, la potencia útil $\eta V_0 I_1$ es igual al valor absoluto de la potencia de las fuerzas de resistencia $F_r v$:

$$\eta u_0 I_1 = F_r v, \tag{2}$$

en donde v es la velocidad del tranvía.

Durante el movimiento hacia abajo por el tramo inclinado con velocidad constante v el motor está desconectadó y el valor absoluto de la potencia de las fuerzas de resistencia $F_r v$ es igual a la potencia de la fuerza de gravedad (fig. 321):

$$F_r v = mg \operatorname{sen} \alpha \cdot v, \tag{3}$$

en donde α es el ángulo de inclinación de la pendiente. Comparando las igualdades (2) y (3) obtenemos:

$$mgv \operatorname{sen} \alpha = \eta U_0 I_1. \tag{4}$$

Durante el moviviento hacia arriba por el mismo tramo de la pendiente la energía, consumida a partir de la red, se gasta en calentar los conductores y realizar el trabajo contra las fuerzas de resistencia y la fuerza de gravedad. Por ello

$$U_0 I_2 = I_2^2 R + F_r v + mgv \operatorname{sen} \alpha . \tag{5}$$

Tomando en consideración (2) y (4) se puede escribir esta ecuación como sigue:

$$U_0 I = I_2^2 R + \eta U_0 I_1 + \eta U_0 I_1,$$

o

$$I_2^2 \frac{R}{U_0} - I_2 + 2\eta I_1 = 0.$$

Al hallar de la igualdad (1) la relación R/U_0 y sustituirla en la última ecuación, obtenemos:

$$I_2^2 (1 - \eta) - I_1 I_2 + 2\eta I_1^2 = 0. \qquad (6)$$

A continuación solucionamos esta ecuación cuadrática respecto a I_2:

$$I_2 = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 8\eta (1 - \eta) I_1^2}}{2(1 - \eta)}.$$

Sustituyendo aquí los valores numéricos de todas las magnitudes hallamos dos valores posibles para la intensidad de corriente I_2:

$$I_2 = 765\,\text{A}, \quad I_2 = 235\,\text{A}.$$

La respuesta de dos acepciones evidencia de que una misma potencia se consume por los motores con dos cargas mecánicas diferentes y respectivamente con dos valores de la velocidad de rotación del inducido. Con ayuda de transmisiones reductoras esta velocidad se selecciona de modo que la intensidad de corriente, consumida por el motor a partir de la red, sea la menor de las posibles.

308. Designemos con x la coordenada del centro de masas de la viga por el eje horizontal. El origen de las coordenadas ($x = 0$) se selecciona de tal modo que coincida con el centro de masas de la viga, cuando éste se halla en el medio entre los ejes de cilindros.

En la viga del lado de los cilindros actúan las fuerzas de reacción $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ y las fuerzas de rozamiento $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (fig. 322). La suma de proyecciones de las fuerzas sobre la dirección vertical es igual a cero:

$$N_1 + N_2 - mg = 0,$$

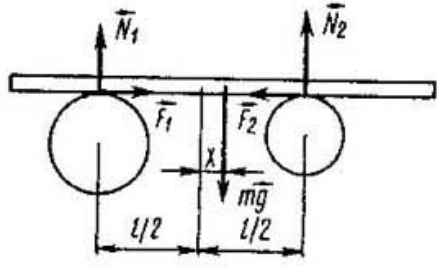


Fig. 322

en donde m es la masa de la viga. Ya que la viga en el plano vertical no da vueltas, entonces

$$mg\left(\frac{l}{2}+x\right)-N_2 l=0.$$

De estas dos igualdades hallamos:

$$N_1=mg\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right),\quad N_2=mg\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{l}\right). \tag{1}$$

Primero la viga resbala respecto a los cilindros y por ello

$$F=\mu N_1 \quad y \quad F_2=\mu N_2.$$

Escribiremos la ecuación de movimiento de la viga:

$$ma=F_1-F_2=\mu\,(N_1-N_2)=-2\mu mg\frac{x}{l}. \tag{2}$$

De esta ecuación se desprende que primero la viga se mueve por la ley armónica

$$x=x_0\cos\Omega t$$

con la frecuencia

$$\Omega=\sqrt{\frac{2\mu g}{l}}=0{,}5\ s^{-1}$$

y la amplitud

$$x_0=\frac{l}{2}=2\ m.$$

Pero la viga va a moverse hasta el momento de tiempo t_1, cuando el valor absoluto de proyección de la velocidad de la misma

$$v=-x_0\,\Omega\,\text{sen}\,\Omega t$$

llegue a ser igual a la velocidad lineal de los puntos de la llanta del cilindro menor

$$v_1=\omega r.$$

Después de ello el resbalamiento entre este cilindro y la viga va a cesar, la fuerza de rozamiento F_2 llega a ser fuerza de rozamiento de reposo que equilibra a la fuerza F_1, y la viga va a moverse de manera unifore con la velocidad $v=v_1=0{,}5$ m/s. Al igualar $|v(t_1)|$ con v_1, hallaremos el valor t_1:

$$\omega r = x_0 \Omega \operatorname{sen} \Omega t_1, \quad t_1 = \frac{1}{\Omega} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\omega r}{\Omega x_0}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ s.}$$

La coordenada x_1 del centro de masas de la viga en este momento de tiempo es igual a

$$x_1 = x_0 \cos \Omega t_1 = \sqrt{3} \text{ m.}$$

Ya que la fuerza, a medida que el centro de masas de la viga va acercando al origen de coordenadas, F_1 aumenta, N_2 disminuye, y $F_2 \leqslant \leqslant \mu N_2$, llegará tal momento, cuando la fuerza F_2 alcanzará su valor máximo y más tarde ya no podrá equilibrar la fuerza F_1. Esto ocurrirá con tal valor de la coordenada del centro de masas de la viga, para el cual

$$\mu N_1 = F_{2\,\max} = \mu N_2,$$

o sea con

$$N_1 = N_2.$$

Al sustituir aquí las expresiones (1) para N_1 y N_2 hallaremos que esto ocurrirá con $x = 0$, o sea al cabo de

$$t_2 = t_1 + \frac{x_1}{v_1} = \left(\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) s \approx 4{,}4 \text{ s}$$

después de iniciar el movimiento de la viga. A partir del momento de tiempo $t = t_2$ la viga va a resbalar respecto a los cilindros y el movimiento de la misma va a efectuarse nuevamente conforme a la ecuación (2). Por consiguiente, esto significa que la viga volverá a moverse por la ley armónica con la frecuencia Ω. La nueva amplitud x'_0 de vibraciones de la viga puede ser hallada conociendo la velocidad máxima de la viga la que es igual a v_1. Ya que

$$v_1 = x'_0 \Omega,$$

entonces

$$x'_0 = \frac{v_1}{\Omega} = 1 \text{ m.}$$

La velocidad de la viga siempre será menor que la velocidad lineal de la llanta del cilindro mayor. Por ello la viga siempre va a resbalar respecto a este cilindro. Va a resbalar asimismo a continuación respecto al cilindro menor, ya que la velocidad de la viga va a alcanzar el valor v_1

sólo en el momento de pasar el centro de masas de la viga la posición de equilibrio ($x = 0$). Por consiguiente, a partir del momento t_2 la viga va a efectuar oscilaciones armónicas con la frecuencia Ω y la amplitud $x_0' = 1$ m. El gráfico de dependencia entre la coordenada del centro de masas de la viga y el tiempo se muestra en la figura 323.

309. En ausencia del campo magnético la varilla efectuaría oscilaciones armónicas cerca de la posición de equilibrio, en la cual el alargamiento del resorte Δl_0 es tal que la fuerza de elasticidad se halla equilibrada por la fuerza de gravedad:

$$k \cdot \Delta l_0 = mg,$$

de donde

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k}.$$

La ecuación de movimiento de la viga se escribirá así:

$$mg - k\Delta l = ma,$$

en donde Δl es el alargamiento del resorte. Adoptando la designación

$$\Delta l = \Delta l_0 + x$$

(en donde x es el desplazamiento de la varilla de la posición de equilibrio) obtendremos:

$$ma = -kx. \qquad (1)$$

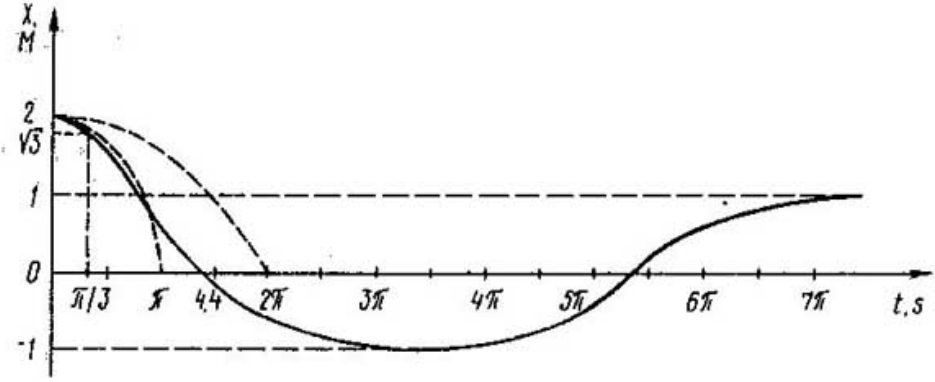


Fig. 323

Esta ecuación corresponde a las oscilaciones armónicas de la varilla con la frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Veamos ahora la influencia que ejercerá en el movimiento de la varilla el campo magnético. En el campo magnético la varilla en movimiento se vuelve un manantial de la FEM:

$$\mathcal{E} = evBl.$$

Esta FEM determina la tensión de carga del condensador. La carga del condensador será igual a

$$q = C\mathcal{E} = CevBl.$$

Al variar la velocidad v de la varilla cambia la FEM $\mathcal{E}$ y, consiguientemente, la carga del condensador q. Por ello por el circuito fluye la corriente.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = eCBl\frac{\Delta v}{\Delta t} = eCBla,$$

en donde a es la aceleración de la varilla.

Al surgir esta corriente, sobre la varilla en el campo magnético actúa la fuerza

$$F = BIl = eaB^2l^2C.$$

Durante el movimiento de la varilla hacia arriba a la posición de equlibrio la velocidad de la misma y, consiguientemente, la FEM de inducción, así como la carga del condensador, aumentan. El sentido de corriente en el circuito se determina por el sentido de la FEM. Con arreglo a la ley de Lentz la corriente en el circuito está dirigida de tal modo que el campo magnético creado por la misma compensa la variación del flujo magnético por el circuito, o sea la inducción de campo magnético de esta corriente está dirigida en el mismo sentido que la inducción del campo exterior. A continuación, moviéndose la varilla hacia arriba fuera de la posición de equilibrio la velocidad de la varilla y la FEM disminuyen. Por ello la dirección de corriente se determina por la polaridad del condensador en descarga y es inversa a la dirección de corriente que tenía lugar en el caso anterior. Esta dirección de corriente se conserva durante el movimiento de la varilla abajo hacia la posición de equlibrio (mientras tanto el condensador va a cargarse) y volverá a cambiar en la inversa en el momento de pasar la varilla la posición de equilibrio.

Siguiendo a continuación la dirección de la fuerza $\vec{F}$ y su variación nos convenceremos que la fuerza $\vec{F}$ siempre está dirigida hacia la posición de equilibrio de la varilla. Por consiguiente, su proyección es negativa con $x > 0$ y positiva con $x < 0$ (fig. 324).

Ahora se puede escribir la ecuación de movimiento de la varilla en el campo magnético:

$$ma = -kx - eaB^2l^2C,$$

o

$$(m + eB^2l^2C) \cdot a = -kx.$$

Tal aspecto de la ecuación de movimiento demuestra que la presencia del campo magnético equivale a la variación de la masa de la varilla, la cual va a efectuar oscilaciones armónicas con la frecuencia

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m + eB^2l^2C}}.$$

310. Se monta la instalación según el esquema ofrecido en la figura 325 (la varilla de masa m_0 se usa como palanca; el prisma se dispone debajo del centro de masas de la varilla). Partiendo de la condición de equlibrio de la palanca determinamos la relación de las masas m_1 y m_2:

$$m_1gl_1 - m_2gl_2 = 0, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}. \qquad (1)$$

Seguidamente bajamos la carga de masa m_2 en el vaso con agua. Sin variar el brazo de la fuerza m_1g aumentamos el brazo de las fuerzas $(m_2g - F_{A_1})$ hasta equlibrarse la palanca (fig. 326).

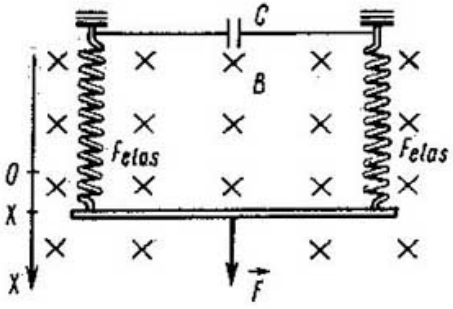


Fig. 324

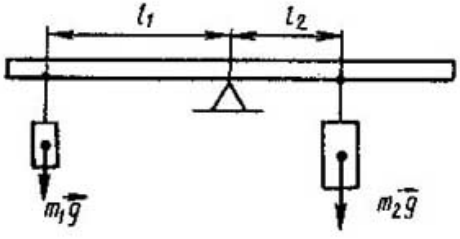


Fig. 325

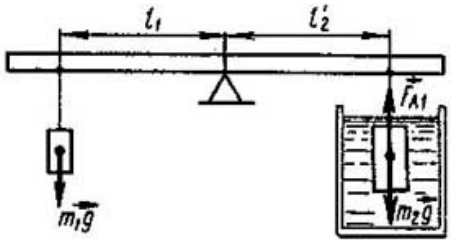


Fig. 326

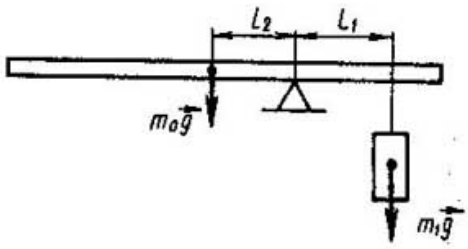


Fig. 327

Usando la condición de equilibrio de la palanca obtenemos:

$$m_1 g l_1 - (m_2 - \rho V_2)\, g l'_2 = 0 \qquad (2)$$

El volumen de la segunda carga V_2 es fácil determinarlo con ayuda de una probeta graduada. De las ecuaciones (1) y (2) hallamos las masas de las cargas m_1 y m_2:

$$m_2 = \frac{\rho V_2 l'_2}{l'_2 - l_2}, \quad m_1 = \frac{\rho V_2 l'_2}{l'_2 - l_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

La masa m_0 de la varilla se puede determinarla equilibrando la varilla con una carga de masa conocida (m_1 o m_2), como se muestra en la figura 327.

Según la condición de equilibrio de la palanca

$$m_0 g L_2 - m_1 g L_1 = 0, \qquad (3)$$

de donde

$$m_0 = \frac{m_1 L_1}{L_2}.$$

311. Metemos la muestra de especie de madera en la probeta graduada con agua de modo que esté flotando en la misma. Valiéndose de un gancho sumergimos la muestra del todo en el agua. Midiendo el volumen inicial de agua V_0 (fig. 328, a) y los niveles de agua en la probeta graduada V_1 y V_2 en los ensayos descritos (fig. 328, b, c), se puede determinar la densidad de la madera ρ. Para el primer ensayo se puede escribir:

$$mg = \rho_0 (V_1 - V_2) \cdot g, \qquad (1)$$

en donde m es la masa de la muestra; ρ_0, la densidad del agua. Para el segundo ensayo tenemos:

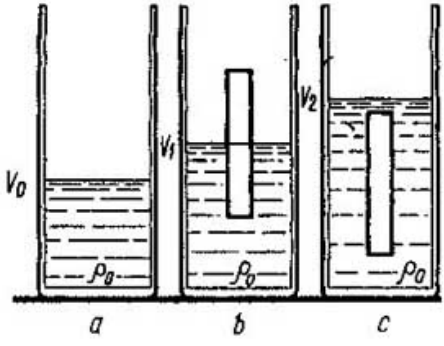


Fig. 328

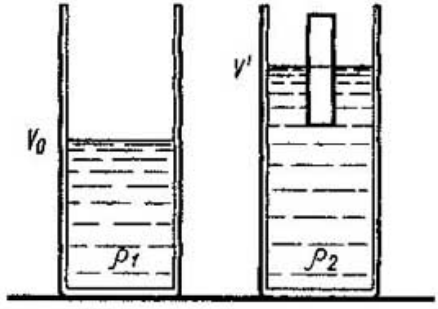


Fig. 329

$$m = \rho\,(V_2 - V_0). \qquad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) obtendremos:

$$\rho\,(V_2 - V_0) = \rho_0\,(V_1 - V_0), \quad \rho = \frac{\rho_0\,(V_1 - V_0)}{V_2 - V_0}.$$

De este mismo modo se puede determinar la densidad de la segunda muestra de madera. Según la tabla se determina la especie de cada una de las muestras.

Para determinar la densidad de la disolución de la caparrosa azul en la probeta con disolución (fig. 329) se baja la muestra, para la cual en el primer ensayo fue determinada la masa $m = \rho_0\,(V_1 - V_0)$. De la condición de flotación de cuerpos obtendremos:

$$mg = (V'_1 - V_0)\,\rho_k\,g,$$

en donde V_0 y V' son los volúmenes que corresponden a los niveles inicial y final de la disolución de la caparrosa azul. De ahí

$$\rho_k = \frac{m}{V'_1 - V_0} = \frac{\rho_0\,(V_1 - V_0)}{V'_1 - V_0}.$$

312. Para cada circuito eléctrico montado según los esquemas presentados en las firguras 330, 331, 332 y 333 se puede escribir la ley de Ohm:

$$\mathcal{E} = I_1\,(r + R_A + R), \qquad (1)$$

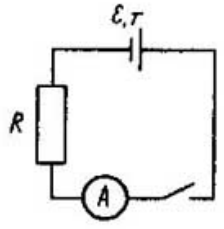


Fig. 330

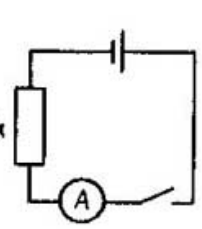


Fig. 331

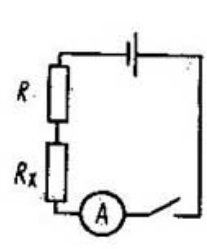


Fig. 332

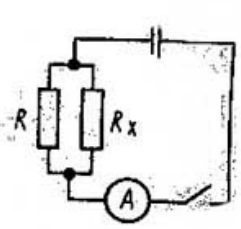


Fig. 333

$$\mathcal{E} = I_2 (r + R_A + R_x), \tag{2}$$

$$\mathcal{E} = I_3 (r + R_A + R + R_X), \tag{3}$$

$$\mathcal{E} = I_4 \left(r + R + \frac{RR_x}{R + R_x}\right). \tag{4}$$

Solucionando en conjunto las ecuaciones (1), (2) y (3) o (1), (2) y (4) se puede determinar los parámetros desconocidos del circuito eléctrico:

$$\mathcal{E}, r \text{ y } R_x.$$

Para la resistencia del resistor R_x obtenemos de las ecuaciones (1), (2) y (3) la expresión

$$R_x = \frac{RI_2 (I_3 - I_1)}{I_1 (I_3 - I_2)}, \tag{5}$$

y de las ecuaciones (1), (2) y (4), la expresión

$$R_x = R \sqrt{\frac{I_1 (I_4 - I_2)}{I_2 (I_4 - I_1)}}. \tag{6}$$

El límite del error relativo para determinar la R_x con la fórmula (5) es igual a

$$\mathcal{E}_{R_x} = \mathcal{E}_{I_2} + \mathcal{E}_{I_3 - I_1} + \mathcal{E}_{I_1} + \mathcal{E}_{I_3 - I_2},$$

y con la fórmula (6)

$$\mathcal{E}_{R_x} = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_{I_1} + \mathcal{E}_{I_4 - I_2} + \mathcal{E}_{I_2} + \mathcal{E}_{I_4 - I_1}).$$

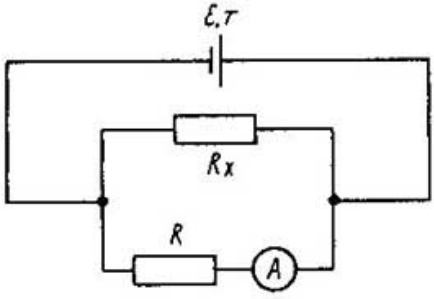


Fig. 334

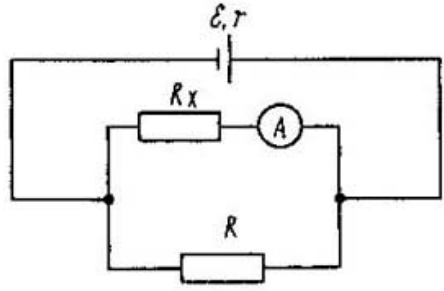


Fig. 335

De este modo, es conveniente emplear los esquemas según las figuras 330, 331 y 333. El resultado de mayor precisión puede ser obtenido montando circuitos según los esquemas ofrecidos en las figuras 334 y 335:

$$(R + R_A) I'_1 = (R_x + R_A) I'_2$$

en donde

$$R_x = R\frac{I'_1}{I'_2} + R_A\frac{I'_1 - I'_2}{I'_2} \approx R\frac{I'_1}{I'_1}.$$

El límite del error relativo resulta sustancialmente menor:

$$\varepsilon_{R_x} \approx \varepsilon_{I'_1} + \varepsilon_{I'_2}.$$

313. Si el rectificador es de dos semiciclos, la relación de la tensión de amplitud U_0 a la efectiva U_1 es la misma que la de la corriente sinusoidal:

$$\frac{U_0}{U_1} = \sqrt{2}.$$

Para el rectificador de un semiciclo el valor efectivo de la intensidad de corriente es $\sqrt{2}$ veces menor que en el caso de la corriente sinusoidal.

Consiguientemente, para el rectificador de un semiciclo

$$\frac{U_0}{U_2} = 2.$$

Así, pues, para determinar el tipo del rectificador montemos el circuito según el esquema presentado en la figura 336. El condensador de gran capacidad se carga hasta el valor de amplitud. Ya que, según los datos del problema, el condensador no llega a descargarse sustancialmente, la tensión en el mismo es igual al valor de amplitud U_0.

La cantidad de calor que desprende el calentador R_2 en el tiempo τ es igual a

$$Q_2 = \frac{U_0^2}{R_2}\tau.$$

El calentador R_1 está acoplado directamente al rectificador y en el mismo tiempo τ desprenderá la cantidad de calor

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1}\tau.$$

El diodo no deja que el condensador se descargue a través del rectificador. Ya que los calorímetros son iguales, entonces

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C \cdot \Delta t_1}{C \cdot \Delta t_2} = \frac{U^2}{U_0^2},$$

o

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{U^2}{U_0^2}.$$

De este modo, si el rectificador es de dos semiciclos, entonces

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{2},$$

y si es de un semiciclo

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{4}.$$

Ya que la diferencia de los resultados posibles es grande (los valores probables de la relación de temperaturas se diferencian dos veces), no es obligatorio tomar en consideración la tranferencia de calor y otras causas de errores de las mediciones: la respuesta siempre tendrá una sola acepción.

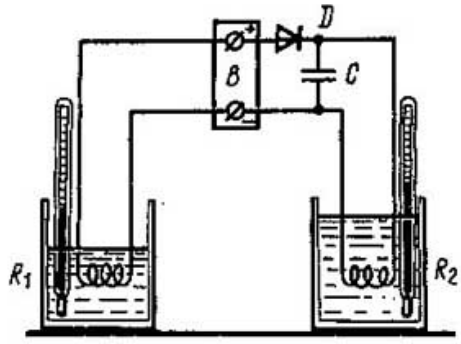


Fig. 336

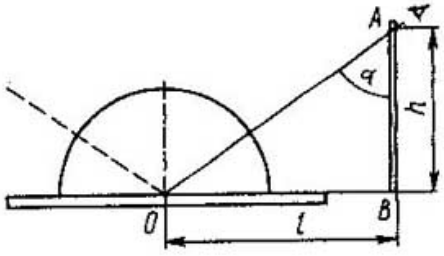


Fig. 337

314. El coeficiente de refracción de vidrio puede ser determinado por varios métodos utilizando el semicilindro como una lente. Pero estos métodos arrojan errores sustanciales, porque el semicilindro no puede considerarse como una lente delgada. El método más preciso se funda en el uso del fenómeno de la reflexión total. Los rayos que van por los radios salen del vidrio sin reflejarse. Por consiguiente, si se traza en el vidrio mate una línea recta y se dispone el semicilindro de modo que el centro de su base coincida con esta línea, entonces con una posición determinada del ojo la esfera de reflexión total llega hasta la línea trazada (fig. 337). El punto O deja de ser visible, ya que tiene lugar la reflexión total.

Para medir el ángulo límite α de incidencia del rayo dispongamos la regla AB verticalmente y en el punto A ubiquemos el ojo. Al medir las distancias h y l, determinaremos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{h}.$$

Es evidente que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}}.$$

Con arreglo a la ley de refracción de la luz para los medios „aire – vidrio" el valor del ángulo límite es igual a

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{n_v}.$$

Por consiguiente,

$$n_v = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{l}.$$

Se puede efectuar una medición más conociendo el índice de refracción de agua n_a. En este caso hay que verter sobre el vidrio mate un poco de agua y, al colocar el semicilindro, medir el $\operatorname{sen}\alpha_1$:

$$\operatorname{sen}\alpha_1 = \frac{n_a}{n_v}, \qquad n_v = \frac{n_a}{\operatorname{sen}\alpha_1}.$$

315. Ante todo hallemos las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de los puntos A_1 y A_2 (fig. 338). Ya que todos los rombos formados por las varillas son símiles, la relación de sus diagonales es igual a la relación de longitudes de los lados:

$$|A_0A_1| : |A_1A_2| : |A_2A_3| = 3 : 2 : 1.$$

Tal es asimismo la relación de variaciones de longitudes de estas diagonales. Si la longitud de la diagonal A_2A_3 varía en Δl, la longitud de la diagonal A_1A_2 variará en $2\Delta l$, mientras que la de la diagonal A_0A_1 en $3\Delta l$. Con ello la distancia entre los puntos A_0 y A_3 variará en

$$\Delta L = \Delta l + 2\Delta l + 3\Delta l = 6\Delta l.$$

Por otro lado,

$$\Delta L = v_0 t.$$

Por consiguiente,

$$6\Delta l = v_0 \cdot \Delta t, \qquad \Delta l = \frac{1}{6} v_0 \cdot \Delta t.$$

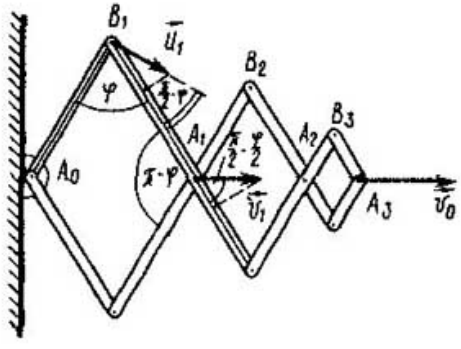


Fig. 338

Las velocidades del punto A_1 son iguales a

$$v_1 = \frac{3\Delta l}{\Delta t} = \frac{v_0}{2}, \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_0,$$

mientras que la velocidad del punto A_2

$$v_2 = \frac{3\Delta l + 2\Delta l}{\Delta t} = \frac{5}{6}v_0, \quad \vec{v}_2 = \frac{5}{6}\vec{v}_0.$$

Ahora hallemos la velocidad $\vec{u}_1$ del punto B_1. El punto B_1 se mueve por la circunferencia de radio A_0B_1 con el centro en el punto A_0. Consiguientemente, la velocidad $\vec{u}_1$, es perpendicular a A_0B_1. Ya que la varilla B_1A_1 es inextensible, estonces las proyecciones de velocidades de los puntos B_1 y A_1 sobre la dirección de la varilla deben ser iguales. Designemos con φ el ángulo $A_0B_1A_1$; entonces se puede escribir:

$$u_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = v_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

en donde

$$u_1 = v_1 \frac{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{v_1}{2\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{v_0}{4\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Con $\varphi \to \pi/2$ obtendremos:

$$u_1 = \frac{v_0\sqrt{2}}{4}.$$

316. En las proximidades de la tierra la gota cae uniformemente con la velocidad $\vec{v}_2$ y las fuerzas, que obran sobre la misma, equilibran una a otra:

$$mg = F_{res},$$

o

$$mg = \alpha v_2,$$

en donde m es la masa de la gota y α el coeficiente de proporcionalidad en la dependencia $F_{res} = \alpha v$.

Moviéndose la gota con la aceleración $\vec{a}$ tenemos:

$$ma = mg - F_{res} = mg - \alpha v_1.$$

De aquí

$$\frac{m}{\alpha} = \frac{v_1}{g - a}.$$

Por ello

$$v_2 = \frac{m}{\alpha} g = v_1 \frac{g}{g - a}.$$

La traza dejada por la gota en el vidrio tiene la dirección del vector de velocidad $\vec{v}_0$ de la gota en el sistema de lectura que se mueve con la velocidad $\vec{u}$ del automóvil. En este sistema de lectura (fig. 339)

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_2 - \vec{u}.$$

Por ello

$$u = v_2 \operatorname{tg}\alpha = v_1 \frac{g}{g - a} \operatorname{tg}\alpha \approx 15 \text{ m/s} = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

De esta manera, la velocidad del automóvil es menor que la máxima admisible.

317. Durante el primer lapso de tiempo τ_1 de 50 min de duración el hielo estaba derritiéndose. Seguidamente comenzó a calentarse el agua. Designemos con q la cantidad de calor que recibe el recipiente del medio ambiente en 1 s. Entonces en el tiempo $\Delta\tau_1$ el recipiente recibe la cantidad de calor $q \cdot \Delta\tau_1$. Por ello

$$m\lambda = q \cdot \Delta\tau_1, \qquad (1)$$

en donde m es la masa de hielo. Al calentarse el agua

$$Mc \cdot \Delta t = q \cdot \Delta\tau_2, \qquad (2)$$

en donde Δt es la variación de la temperatura del agua en el tiempo $\Delta\tau_2$. De las igualdades (1) y (2) obtendremos:

$$m = \frac{Mc}{\lambda} \frac{\Delta t}{\Delta\tau_2} \Delta\tau_1. \qquad (3)$$

En el gráfico se ve que si $\Delta\tau_2 = 10$ min, entonces $\Delta t = 2$ °C. Al sustituir en (3) el valor de las magnitudes, obtendremos:

$$m = \frac{10 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{3{,}4 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}} \cdot \frac{2\text{K} \cdot 50 \text{ min}}{10 \text{ min}} = 1{,}24 \text{ kg}.$$

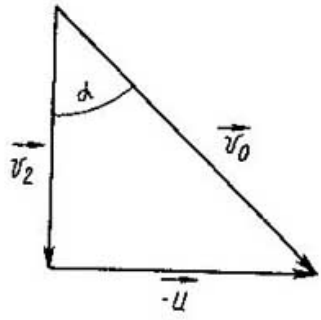


Fig. 339

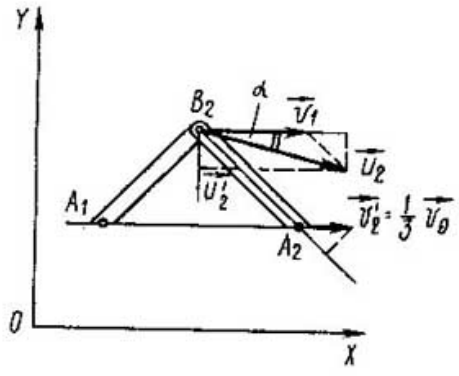


Fig. 340

318. De no haber corriente que fluye por el resistor R1, la tensión U_3 en el resistor R3 debe ser igual a U_1. Ya que los resistores R2 y R3 están acoplados en serie, entonces

$$U_1 = U_3 = \frac{U_2}{R_2 + R_3} R_3,$$

o

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}.$$

319. De manera análoga a la solución del problema 315 determinamos las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de los puntos A_1 y A_2:

$$v_1 = \frac{v_0}{6}, \quad v_2 = \frac{v_0}{2}.$$

Para determinar la velocidad del punto B_2 es cómodo examinar su movimiento en el sistema de lectura que se mueve con la velocidad $\vec{v}_1$. En este sistema de lectura el punto A_1 es fijo, mentras que el punto A_2 se mueve con la velocidad

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \text{ o } \quad v_2' = \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{3}.$$

La velocidad $\vec{u}$ del punto B_2 es perpendicular a la varilla A_1B_2 e igual en módulo a

$$u'_2 = \frac{v'_2}{2\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{v_0}{6\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

En el sistema fijo de lectura la velocidad $\vec{u}_2$ del punto B_2 se expresa como sigue:

$$\vec{u}_2 = \vec{u}'_2 + \vec{v}_1,$$

Con $\varphi = \pi/2$ el módulo del vector de u_2 es igual a

$$u'_2 = \frac{v_0}{3\sqrt{2}},$$

mientras que las proyecciones del vector de $\vec{u}'_2$ sobre los ejes de coordenadas OX y OY (fig. 340) adoptan los valores:

$$u_{2x} = v_1 + u'_2 \cos 45° = \frac{v_0}{6} + \frac{v_0}{6} = \frac{v_0}{3}, \quad u_{2y} = u'_2 \operatorname{sen} 45° = \frac{v_0}{6}.$$

Por ello

$$u_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \frac{v_0\sqrt{5}}{6}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{1}{2}.$$

320. La velocidad del automóvil se halla igual que en el problema 316. Pero con ello se toma en consideración que la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad:

$$F_{res} = \alpha v^2.$$

La velocidad de la gota cerca de la tierra en este caso será igual

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{g}{g-a}},$$

mientras que la velocidad del automóvil

$$u = v_2 \operatorname{tg}\alpha \approx 23{,}5 \text{ m/s} \approx 85 \text{ km/h}.$$

La misma será mayor que la máxima admisible.

321. Si encima de la superficie de hielo se encontrase el vapor saturado, en el hielo penetraría en el tiempo Δt tal cantidad de moléculas Z que lo abandona en el mismo tiempo. Por ello

$$Z = \frac{1}{2}|\overline{v_x}| n S \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \frac{p_s}{kT} \sqrt{\frac{RT}{M}} S \cdot \Delta t$$

en donde

$$|\overline{v_x}| = \frac{v}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

es el valor cuadrático medio del módulo de proyección de velocidad de la molécula sobre el eje OX, perpendicular a la superficie de hielo; v, la velocidad térmica de las moléculas de vapor a la temperatura T, $n = \frac{p_s}{kT}$, la concentración de moléculas de vapor; S, la superficie del área abierta de hielo. Por consiguiente, en el tiempo Δt se evapora

$$\nu = \frac{Z}{N_a} \tag{1}$$

moles de hielo. La masa Δm del hielo evaporado es igual a

$$\Delta m = \nu M = \frac{1}{2} p_s \sqrt{\frac{M}{RT}} S \cdot \Delta t. \tag{2}$$

El vapor formado en el tiempo Δt se lleva el impulso

$$\Delta m \cdot v = \frac{1}{2} p_s S \cdot \Delta t. \tag{3}$$

Por eso en el hielo y, consiguientemente, en el cosmonauta actúa la fuerza reactiva

$$F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{1}{2} p_s S. \tag{4}$$

Esta fuerza comunica al cosmonauta la aceleración

$$a = \frac{F}{m_c} = \frac{p_s S}{2m_c}. \tag{5}$$

Moviéndose con tal aceleración el cosmonauta alcanzará la nave en el tiempo

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{4m_c l}{p_s S}}. \tag{6}$$

Suponiendo que el diámetro del vaso es igual a 7 cm, hallaremos:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = 3{,}8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.$$

Al sustituir en la fórmula (6) los valores de las magnitudes, obtendremos:

$$t \approx 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ C}.$$

Pero esto es justo si el hielo no se evaporará en un tiempo más breve. Adoptando la masa de hielo m en el vaso igual a 0,2 kg determinaremos el tiempo t_1 de evaporación del hielo:

$$t_1 = \frac{2m}{p_S S \sqrt{\frac{M}{RT}}} \approx 6{,}7 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

De este modo, $t_1 > t$. Consiguientemente, el cosmonauta puede alcanzar la nave en el tiempo

$$t \approx 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 23{,}3 \text{ min}.$$

El proyecto resulta bastante real.

322. Consideremos que la hendidura es tan estrecha que la distancia a la cual el espesor del haz cambia notablemente (por ejemplo, dos veces) es mucho mayor que la anchura de la misma d_0. En este caso se puede considerar que el haz es una placa planoparalela cargada que crea el campo eléctrico de intensidad

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

en donde σ es la densidad de la carga en la placa igual a la relación de la carga Q de una parte de la placa a la superficie S de esta parte. Tal que

$$Q = enSd_0,$$

entonces

$$\sigma = end_0.$$

Por consiguiente,

$$E = \frac{end_0}{2\varepsilon_0}.$$

En este campo sobre el electrón junto al límite del haz actúa la fuerza

$$F = eE,$$

que le comunica la aceleración en dirección perpendicular al haz

$$a = \frac{F}{m} = \frac{e^2 n d_0}{2m\varepsilon_0}.$$

La anchura del haz se duplicará cuando el electrón recorra con esta aceleración la distancia $\frac{d_0}{2}$, o sea dentro del lapso de tiempo

$$t = \sqrt{\frac{d_0}{a}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m}{e^2 n}}.$$

A lo largo del haz el electrón se apartará, durante este tiempo, de la hendidura a la distancia

$$l = vt = v\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m}{e^2 n}} \approx 2{,}5 \text{ cm}.$$

323. La tensión U_d en el diodo se expresa así:

$$U_d = U - IR_1 - IR_2,$$

en donde I es la intensidad de corriente en el circuito; U, la tensión en los polos del manantial. De aquí

$$I = \frac{U - U_d}{R_1 + R_2}. \qquad (1)$$

Por otro lado, la tensión en el diodo y la intensidad de corriente, que fluye por el mismo, deben corresponder a la característica de voltios-amperios del diodo I (U_d) (fig. 120). Por ello la tensión en el diodo y la intensidad de corriente en el circuito se determinan por los puntos de intersección de los gráficos de I (U_d) con las rectas de carga determinadas por la ecuación (1). Tracemos estas rectas para tres temperaturas del medio ambiente (fig. 341) tomando en consideración que con t_2 = 25 °C la tensión del manantial U = 6 V, mientras que a la temperatura t_1 = 125 °C la tensión es igual a

$$U_1 = U + \frac{\Delta U}{\Delta t}(t_1 - t_2) = 8{,}5 \text{ V}$$

y a la temperatura t_3 = -60 °C es igual a

$$U_3 = U - \frac{\Delta U}{\Delta t}(t_2 - t_3) = 3{,}875 \text{ V}.$$

Con el gráfico hallaremos para $t_2 = 25$ °C los valores de U_d e I (el punto operacionad del diodo):

$$U_d = 0{,}8 \text{ V}, \qquad I = 1 \text{ mA}.$$

La tensión U_{AB} entre los puntos A y B es igual a

$$U_{AB} = U - IR = 1 \text{ V}.$$

La variación de esta tensión ΔU_{AB}, al variar la temperatura en Δt, es igual a

$$\Delta U_{AB} = -\Delta I \cdot R_1,$$

mientras que la variación de la tensión $U_{AB}(t)$, al variar la temperatura en 1 °C, es igual a

$$\frac{\Delta U_{AB}}{\Delta t} = -\frac{\Delta I}{\Delta t} R_1.$$

En el gráfico se ve que la dependencia de I (t) a las temperaturas desde t_3 hasta t_1 es prácticamente lineal y

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{0{,}84 \text{ mA}}{185 \text{ K}} \approx 0{,}0046 \frac{\text{mA}}{\text{K}}.$$

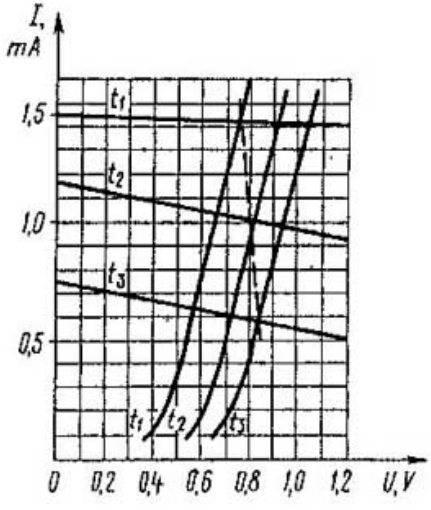


Fig. 341

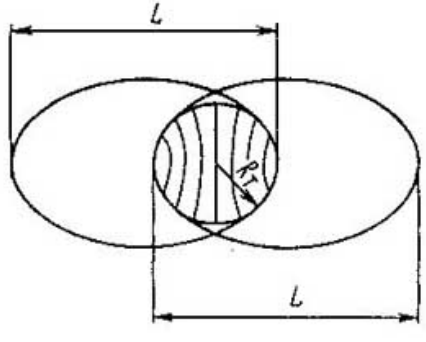


Fig. 342

Por ello

$$\frac{\Delta U_{AB}}{\Delta t} = 0{,}0046 \frac{\text{mA}}{\text{K}} \cdot 5\ \text{kOhms} = 0{,}023 \frac{\text{V}}{\text{K}}$$

y

$$U_{AB}(t) = U_{AB} + \frac{\Delta U_{AB}}{\Delta t}(t_2 - t_1).$$

324. Los cohetes se mueven por elipses. El punto de su despegue corresponde a la distancia mínima desde el centro de la Tierra, mientras que el punto de la órbita que se halla encima del punto de la Tierra diametralmente opuesto, al apogeo de la órbita. En estos puntos la velocidad del cohete es perpendicular a la recta trazada desde el centro de la tierra a la órbita. Designemos con L la longitud del eje mayor de la órbita. Entonces la distancia máxima s entre los cohetes (fig. 342) será igual a

$$s = 2L - 2R_t,$$

El período T de vuelo del cohete por la órbita es igual a 2τ. Si el período de vuelo, por la órbita circular de radio R_t se designa con T_1, entonces según la tercera ley de Kepler

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \left(\frac{\frac{L}{2}}{R_t}\right)^3,$$

de donde

$$L = 2R_t \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_1}\right)^2}.$$

Ya que la aceleración centrípeda del satélite que se mueve por la órbita circular de radio R_t es igual a g, entonces $g = \omega^2 R_t$.

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_t}{g}}.$$

Por ello

$$L = 2R_t \sqrt{\frac{4\tau^2 g}{4\pi^2 R_t}} \approx 5{,}6\ R_t. \quad S = 9{,}2\ R_t \approx 5{,}9 \cdot 10^4\ \text{km}.$$

325. El difusor constituye un péndolo de muelle y su frecuencia cíclica resonante es igual a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}, \qquad (1)$$

en donde k_0 es la rigidez del sistema elástico del difusor. De aquí

$$k_0 = \omega_0^2 \, m. \qquad (2)$$

Cuando el altoparlante se aloja en una caja, entonces al desplazarse el difusor de la posición de equilibrio en el mismo actúa una fuerza complementaria

$$F = (p - p_0)S, \qquad (3)$$

en donde p es la presión del aire en la caja; p_0, la presión atmosférica fuera de la caja. Ya que la temperatura del aire en la caja no cambia, entonces con arreglo a la ley de Boyle – Mariotte

$$pV = p_0 V_0$$

o

$$p = \frac{p_0 V_0}{V}.$$

Al sustituir esta expresión en la fórmula (3), obtenemos:

$$F = p_0 S \frac{V_0 - V}{V}. \qquad (4)$$

Ya que

$$V_0 - V = Sx,$$

en donde x es el corrimiento del difusor, entonces

$$F = \frac{p_0 S^2}{V_0} x \qquad (5)$$

(dado que la variación de volumen es pequeña, adoptemos en el denominador $V = V_0$). De esta fórmula se desprende que el aire contenido en la caja obra de la misma manera que un muelle con la rigidez

$$k_1 = \frac{p_0 S^2}{V_0}.$$

La rigidez total del sistema elástico es igual a

$$k = k_0 + k_1 = \omega_0^2\ m + \frac{p_0 S^2}{V_0},$$

mientras que la frecuencia resonante ν del difusor

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\nu_0^2 + \frac{p_0 S^2}{4\pi^2 V_0 m}} \approx 115 \text{ Hz}.$$

326. El puente estará equilibrado y por el galvanómetro no fluirá corriente si entre las tensiones en los resistores tendrá lugar la relación

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_4}. \qquad (1)$$

Tal que

$$U_1 = \alpha I^2,\ U_2 = IR,\ U_3 = IR,\ U_4 = \alpha I^2,$$

entonces la condición (1) se puede escribir como sigue:

$$\frac{\alpha I^2}{IR} = \frac{IR}{\alpha I^2}. \qquad (2)$$

De aquí

$$I = \frac{R}{\alpha}.$$

Por consiguiente,

$$U_0 = U_1 + U_2 = \alpha I^2 + RI = 2\frac{R^2}{\alpha}.$$

327. En el régimen estabilizado ambos diodos se hallan cerrados y por los condensadores C_1 y C_2 fluye una corriente alterna igual. Consiguientemente,

$$U_1 C_1 \omega = U_2 C_2 \omega,$$

o

$$U_1 C_1 = U_2 C_2, \qquad (1)$$

en donde U_1 y U_2 son las amplitudes de la tensión alterna en los condensadores C_1 y C_2. Además de la componente alterna, en los condensadores estará asimismo una componente constante de tensión igual en módulo, pero de signos diferentes. Designando con U_3 la componente constante, obtendremos:

$$U_{C1} = U_1 \cos \omega t - U_3,\ U_{c2} = U_2 \cos \omega t + U_3,$$

de donde

$$U_{C_1} + U_{C_2} = U_0 \cos\omega t, \qquad (2)$$

en donde $U_0 = U_1 + U_2$. Tomando en consideración que

$$C_1U_1 = C_2U_2,$$

obtenemos:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U_0, \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0.$$

Por consiguiente,

$$U_{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U_0 \cos\omega t - U_3, \quad U_{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0 \cos\omega t + U_3. \qquad (3)$$

Ya que ambos diodos se hallan cerrados, entonces

$$U_{C_1} \leqslant 0, \quad U_{C_2} \geqslant 0. \qquad (4)$$

Estas desigualdades han de cumplirse en conjunto. Ya que según los datos del problema $C_2 > C_1$, es suficiente exigir el cumplimiento de la desigualdad $U_{C_1} \leqslant 0$ con cualquier valor de t. Esta condición se cumplirá si

$$\frac{C_2}{C_1 + C_2} U_0 - U_3 = 0,$$

de donde

$$U_3 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U_0. \qquad (5)$$

Finalmente obtenemos:

$$U_{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U_0(\cos\omega t - 1), \quad U_{C_2} = \frac{U_0}{C_1 + C_2}(C_1 \cos\omega t + C_2).$$

De manera gráfica estas dependencias se ilustran en la figura 343.

328. Prescindamos del ensanche del haz y consideremos que el tamaño del rayo solar coincide con el tamaño del espejo. En este caso la luminosidad del rayo solar es igual a la luminosidad E_0 del espejo. La luminosidad de la mancha en caso de superponerse n rayos solares es igual a

$$E_1 = nE_0. \qquad (1)$$

Comparemos esta luminosidad con la luminosidad en el plano focal de la lente. La lente la hiere el flujo luminoso

$$Fl = SE_0 = \frac{\pi d^2}{4} E_0.$$

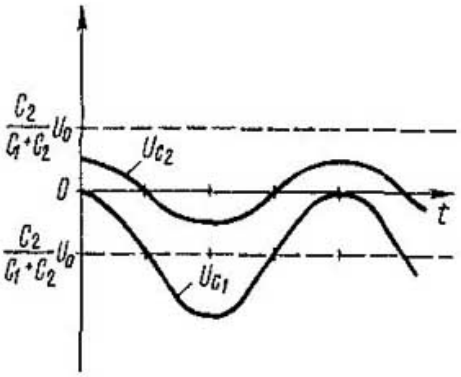


Fig. 343

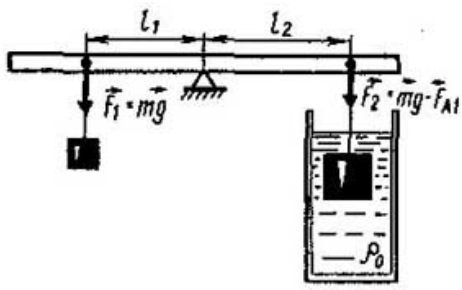


Fig. 344

El diámetro de la imagen del Sol en el plano focal de la lente es igual a

$$D = F\alpha$$

Por ello la luminosidad de la imagen es igual a

$$E_2 = \frac{4Fl}{\pi D^2} = \frac{E_0 d^2}{F^2\alpha^2}. \qquad (2)$$

Hallemos la relación de las luminosidades $k = \frac{E_1}{E_2}$:

$$k = \frac{nF^2\alpha^2}{d^2} \approx 0{,}1.$$

Esto significa que la luminosidad obtenida con ayuda de n espejos planos es menor que la luminosidad de la imagen del Sol en el plano focal de la lente. Por consiguiente, el número de combatientes señalado en los datos del problema es insuficiente para prender al buque.

329. Según el contenido este problema se asemeja al problema 158. En ambos problemas hace falta proponer un método de medición del rendimiento del plano inclinado e investigar la dependencia entre el rendimiento y el ángulo de inclinación α o la altura h con la longitud constante del plano inclinado l. Como tarea complementaria se propone comparar la dependencia teórica obtenida

$$\eta = \frac{1}{1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\eta = \frac{h}{h + \mu\sqrt{l^2 - h^2}}$$

con la dependencia obtenida experimentalmente.

330. Para cumplimentar la tarea se debe, valiéndose de la palanca, comparar las masas de dos cuerpos metálicos disponibles en el equipo y convencerse de que son iguales. La densidad ρ_x del líquido desconocido puede ser determinada por efectuar dos pruebas siguientes.

1. Al fijar una barra en la palanca a la distancia R_1 del eje de su rotación, se baja la segunda barra, suspendida del otro brazo de la palanca, al agua. Variando la longitud del brazo l_2 de segunda barra se equilibra la palanca (fig. 344).

2. Se saca la segunda barra del agua y se inmerge en el líquido a investigar, sin variar la longitud del brazo l_1 de primera barra. Al equilibrar la palanca se mide la longitud del brazo l_3 del lado de la segunda barra (fig. 345). A continuación se escriben las condiciones de equilibrio de la palanca en ambas pruebas:

$$mgl_1 = (mg - F_{A_1})\, l_2,$$

$$mgl_1 = (mg - F_{A_2})\, l_3.$$

Al solucionar este sistema de ecuaciones y tomando en consideración que

$$F_{A_1} = \rho_0 Vg, \quad F_{A_2} = \rho_x Vg$$

(en donde ρ_0 y ρ_x son las densidades del agua y del líquido a investigar, mientras que V es el volumen de segunda barra) obtenemos:

$$mg\,(l_2 - l_1) = \rho_0 Vgl_2,$$

$$mg\,(l_3 - l_1) = \rho_x Vgl_3.$$

Al dividir la primera ecuación por la segunda, tenemos:

$$\frac{l_2 - l_1}{l_3 - l_1} = \frac{\rho_1 l_2}{\rho_x l_3},$$

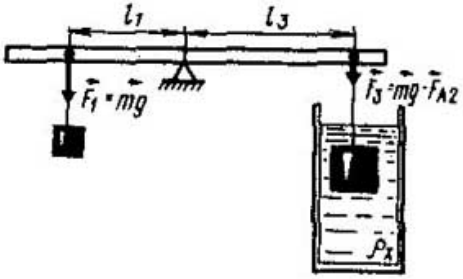


Fig. 345

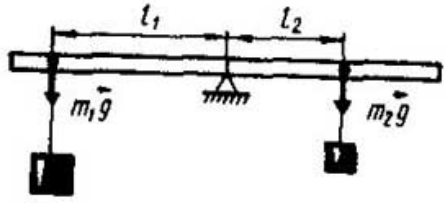


Fig. 346

de donde

$$\rho_x = \rho_0 \frac{l_2(l_3 - l_1)}{l_3(l_2 - l_1)}.$$

Puesto que la precisión de la medición de la densidad ρ_x depende de la diferencia de longitudes de los brazos $l_3 - l_1$ y $l_2 - l_1$ para aumentarla hay que inmergir en el líquido una barra de volumen más grande.

331. La tensión superficial de un líquido desconocido puede ser determinada por unos cuantos métodos. Examinemos dos de ellos.

1. Sea que una de las cargas propuestas (m_1) tiene la base plana y se moja con ambos líquidos. Equilibremos las cargas m_1 y m_2 en la palanca (fig. 346) y anotemos la condición de este equilibrio:

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2. \quad (1)$$

Sin variar el brazo l_1 bajemos la carga de base plana y vamos a aumentar el brazo de fuerza $m_2 g$ hasta que la carga m_1 se desprenda de la superficie de agua. Seguidamente medimos la longitud del brazo l_3 de la fuerza $m_2 g$ y anotamos la condición de equilibrio de la palanca para este caso (fig. 347):

$$(m_1 g + F_{t1}) l_1 = m_2 g l_3. \quad (2)$$

Procediendo de manera analógica con el líquido desconocido (fig. 348) obtenemos la ecuación

$$(m_1 g + F_{t2}) l_1 = m_2 g l_4. \quad (3)$$

En estas ecuaciones F_{t1} y F_{t2} son fuerzas de tensión superficial iguales a

$$F_{t1} = \sigma_0 L, \quad F_{t2} = \sigma_x L,$$

en donde σ_0 y σ_x son las tensiones superficiales del agua y del líquido desconocido; L, la longitud del límite de la capa superficial al desprenderse la carga. De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos la igualdad

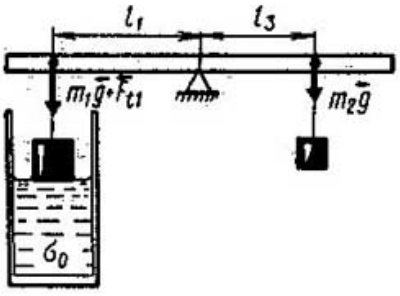


Fig. 347

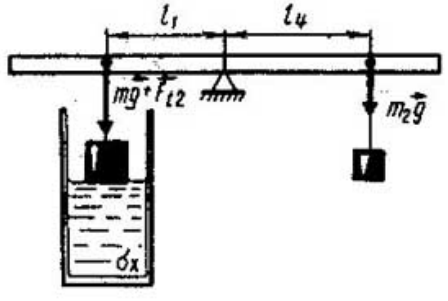


Fig. 348

$$\sigma_0 L l_1 = m_2 g (l_3 - l_2), \qquad (4)$$

y de las ecuaciones (1) y (3), la igualdad

$$\sigma_x L l_1 = m_2 g (l_4 - l_2). \qquad (5)$$

Al solucionar en conjunto las ecuaciones (4) y (5), hallamos:

$$\sigma_x = \sigma_4 \frac{l_4 - l_2}{l_3 - l_2}.$$

La expresión obtenida es justa si la longitud del límite de la capa superficial L en ambos casos es igual. Esto tendrá lugar si ocurre el mojamiento completo de la carga m_1 con ambos líquidos y si las condiciones de desprendimiento de la carga en ambos casos son iguales (no debe haber sesgo).

2. El segundo método de medición de la tensión superficial se funda en la comparación de las alturas h_1 y h_2 de elevación del agua y del líquido a investigar en el capilar de vidrio. Al suponer la mojabilidad completa del vidrio con ambos líquidos se puede escribir:

$$h_1 = \frac{2\sigma_0}{\rho_0 g r}, \quad h_2 = \frac{2\sigma_x}{\rho_x g r},$$

en donde ρ_0 y ρ_x son las densidades del agua y del líquido a investigar; r, el radio del capilar. De aquí

$$\sigma_x = \sigma_0 \frac{h_2 \rho_x}{h_1 \rho_0}.$$

Las alturas h_1 y h_2 se determinan por medición ordinaria, mientras que da relación de densidades ρ_x/ρ_0 se determinan con ayuda de una palanca aplicando la metodología descrita en el problema 330.

332. Para investigar el circuito de la "caja negra" lo más conveniente es montar un circuito eléctrico según el esquema ofrecido en la figura 349.

Moviéndose lentamente el cursor de potenciómetro hacia arriba según la figura se produce el aumento de la tensión en los bornes AB.

Con una polaridad de conexión del manantial de corriente la lámpara L_2 comienza a lucir antes que la lámpara L_1. Sólo en caso de seguir aumentando la tensión U_{AB} comienza a lucir asimismo la lámpara L_1; a continuación la incandescencia de ambas lámparas prácticamente llega a igualarse, cosa que evidencia sobre la reducción de la resistencia de la "caja negra" con el crecimiento de la intensidad de corriente, o sea de que la "caja negra" contiene un elemento alineal.

En el caso de otra polaridad la lámpara L_2 también comienza a lucir con una tensión menor que la lámpara L_1; la lámpara L_1 no luce incluso

con el aumento considerable de la tensión U_{AB}, hecho que testimonia sobre una resistencia grande de la "caja negra" con esta dirección de la corriente eléctrica.

De este modo, se puede sacar la conclusión sobre la presencia en la "caja negra" de un diodo. Pero si la tensión sigue aumentando hasta el valor crítico U_{cr}, la lámpara L_1 se enciende, mientras que el brillo de incandescencia de la lámpara L_2 algo disminuye. Esto evidencia de que con una tensión determinada el diodo es "perforado", o sea su resistencia a salto llega a ser mucho menor. El valor numérico de U_{cr} puede ser apreciado por la fórmula

$$U_{cr} = U_0 \frac{x}{l},$$

en donde x es la distancia que media entre el punto inferior del arrollamiento del reóstato y su cursor; l, toda la longitud de arrollamiento del reóstato. Esta fórmula es justa a condición de que la resistencia del circuito exterior es mayor que la resistencia del tramo de reóstato cuyo arrollamiento mide x de largo. En dicho caso la resistencia de la lámpara es igual a

$$R_L = \frac{6{,}3V}{0{,}3A} = 21 \text{ Ohms} > R_x.$$

De manera análoga se puede calcular la tensión, con la cual se iguala la incandescencia de ambas lámparas en la primera prueba.

Al repetir la prueba y convencerse de que el diodo vuelve a ser apto para el funcionamiento, se puede sacar la conclusión sobre la reversibilidad de la "perforación". Esto significa que en la "caja negra" no se halla un diodo corriente, sino un estabilivolt.

Para verificar esta suposición hay que montar el circuito con arreglo al esquema ofrecido en la figura 350.

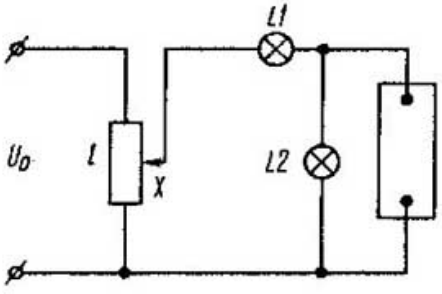


Fig. 349

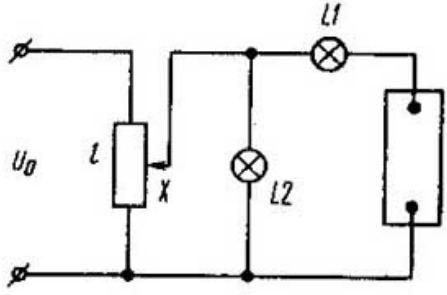


Fig. 350

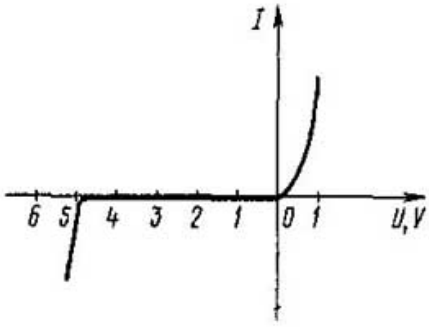


Fig. 351

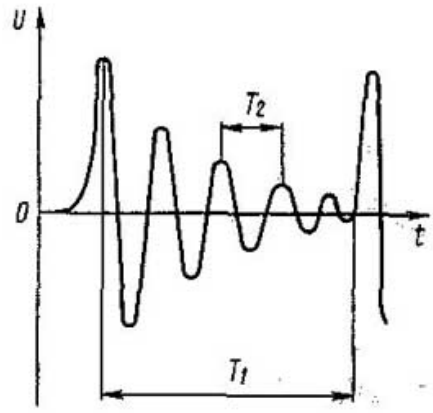


Fig. 352

Al aumentar la tensión U_{AB} las incandescencias de ambas lámparas crecen de manera monótona, permaneciendo iguales. Por consiguiente, la corriente no fluye por la "caja negra". Tras alcanzar la tensión U_{AB} un valor determinado la incandescencia de la lámpara L_1, yendo en aumento la tensión U_{AB}, sigue creciendo, mientras que la incandescencia de la lámpara L_2 prácticamente no varía.

Según los resultados de las pruebas efectuadas se puede determinar el curso de la característica de voltios-amperios del estabilivolt (fig. 351).

333. 1. Al acoplar a la entrada del convertidor de señales (CS) el generador (GA) que crea la tensión sinusoidal y conectar la salida del convertidor con la entrada del oscilógrafo electrónico (OE), según la imagen, que se observa en la pantalla del oscilógrafo, se puede establecer que dicho convertidor traduce las oscilaciones sinusoidales en breves impulsos, siendo el período de repetición de éstos exactamente igual al período de las oscilaciones sinusoidales.

2. Para determinar la inductancia L_x de la bobina hay que montar el circuito eléctrico según el esquema ofrecido en la figura 124. El impulso de corriente procedente del CS carga al condensador C y en el circuito L_xC surgen oscilaciones electromágnéticas que son amortiguadas debido a la presencia de una resistencia activa en el circuito y en el convertidor. En la pantalla del oscilógrafo este proceso aparece más o menos así cómo se muestra en la figura 352. En la figura están marcados el período T_1 de repetición de los impulsos, que puede ser determinado según la escala del generador GA, y el período buscado T_2 de las oscilaciones electromagnéticas amortiguadas en el circuito.

A continuación hay que calcular el número de armónicos n entre dos impulsos sucesivos y la frecuencia buscada de oscilaciones en el circuito:

$$T_2 = \frac{T_1}{n}, \quad \nu_2 = n\nu_1.$$

Conociendo la frecuencia ν_2 y valiéndose de la fórmula de Tomson

$$\nu_2 \frac{1}{2\pi\sqrt{L_x C}},$$

se puede determinar la inductancia buscada L(x):

$$L_x = \frac{1}{4\pi^2 C \nu_2^2},$$

en donde C es la capacidad conocida del condensador.

3. En la tercera tarea en lugar del circuito se acopla un altoparlante. El difusor del altoparlante sujeto elásticamente es un sistema oscilatorio mecánico. Cuando al altoparlante se aplica un impulso eléctrico, el difusor empieza a ejecutar oscilaciones mecánicas amortiguadas con la frecuencia propia ω_0. Pero ya que la bobina del altoparlante se halla en un campo magnético constante, en la misma se induce una FEM variable de frecuencia ω_0. Por un método similar al descrito en la tarea 2 se puede determinar la frecuencia de oscilaciones propias de difusor del altoparlante, o seá, que da lo mismo, su frecuencia resonante.

334. 1. Se puede proponer dos métodos sencillos y al mismo tiempo precisos de construcción de la trayectoria de los rayos en la placa rectangular transparente.

El primero consiste en lo siguiente. La placa se coloca sobre papel milimetrado, se contornea el límite de la arista inferior de la placa y se traza una marca en la arista vertical. Con fines de comodidad de alineación de esta marca con las líneas seleccionadas detrás de la placa es

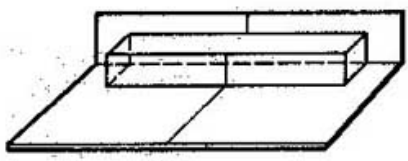


Fig. 353

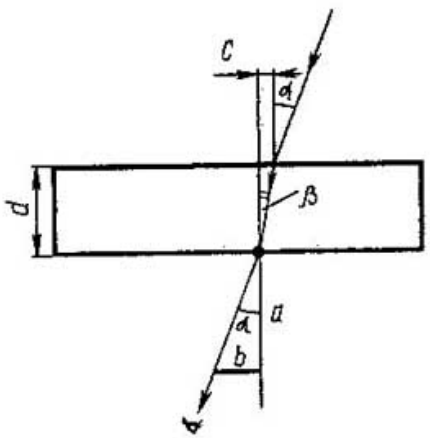


Fig. 354

conveniente doblar el papel milimetrado tal como se muestra en la figura 353. A continuación, observando a través de la placa, marcar un punto en el tramo horizontal de papel delante de la placa de modo que este punto, la marca y una de las líneas verticales de papel milimetrado resulten solapados (el método descrito es análogo al trabajo de laboratorio de escuela para determinar el índice de refracción con el uso de alfileres).

Los ángulos se determinan a base de simples fórmulas trigonométricas (fig. 354):

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{d}{c}.$$

A base de los datos obtenidos se construye el gráfico de dependencia entre el ángulo de refracción β y el ángulo de incidencia (fig. 355) y se determina el índice de refracción n para distintos ángulos de incidencia. Los resultados más precisos se obtienen para los ángulos de incidencia desde 30 hasta 60°.

El ángulo de refracción β_0 con el ángulo de incidencia $\alpha_0 = 90°$ puede ser determinado según el gráfico mediante la extrapolación o ser calculado por la fórmula

$$\beta_0 = \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{n}.$$

Una vez colocada la placa sobre papel milimetrado se traza en éste una línea a la distancia a de la arista inferior A de la placa (fig. 356). Seguidamente la placa se desplaza de modo que una mitad de la línea resulte debajo de la misma, mientras que la otra permanezca destapada. Observando la línea trazada a través de la arista superior B de la placa

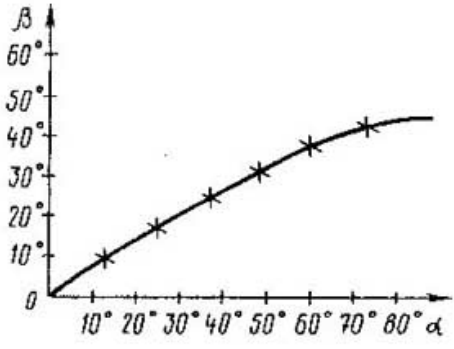


Fig. 355

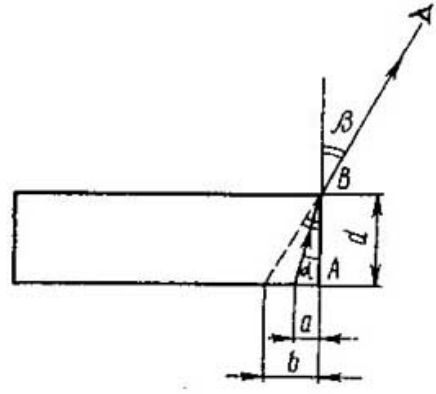


Fig. 356

de tal modo que coincida con la imagen de la línea, se fija la posición visible de la línea y se mide la distancia b que media entre la misma y la arista A. En la figura 356 se ve que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{d}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{d},$$

en donde d es la altura de la placa. De estas expresiones se hallan los valores de los ángulos de incidencia (α) y de refracción (β).

XV OLIMPIADA DE LA UNION SOVIETICA

En abril de 1981 en la ciudad de Tashkent tuvo lugar la ronda final de la XV olimpiada física de escolares de la Unión Soviética. He aquí algunos de los problemas propuestos en esta ronda.

PROBLEMAS DE CALCULO

1. (8vo grado). Una pequeña bola se mueve con la velocidad constante v_0 por superficie horizontal lisa y en cierto punto de su trayectoria cae en un pozo cilíndrico vertical de profundidad H y de radio R. El vector de la velocidad de la bola forma el ángulo α con el diámeto del pozo que pasa por este punto. ¿Cuál es la relación entre R, H, v_0 y α con la que la bola, tras ejecutar colisiones elásticas con la pared y el fondo del pozo, podrá "salir" del mismo?

Nota. En el caso de la colisión elástica de la bola con la pared el módulo de la velocidad no cambia, mientras que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

2. (9-10 grados). Un recipiente cilíndrico termoaislado horizontalmente dispuesto de volumen $V_0 = 100$ l, lleno de helio, está dividido en dos partes por un émbolo térmicamente no penetrable, el cual puede desplazarse sin rozamiento. Al gas que se encuentra en la parte izquierda del recipiente se le comunica la cantidad de calor $\Delta Q = 100$ J. Hallar la variación de la presión en el recipiente para el momento, cuando el émbolo deje de moverse.

3. (9no grado). Para investigar las propiedades de un resistor no lineal fue efectuada una serie de experimentos. Primero fue examinada la dependencia entre la resistencia del resistor y la temperatura. Al llegar la temperatura a $t_1 = 100$ °C la resistencia de resistor aumentó a salto desde $R_1 = 50$ Ohms hasta $R_2 = 100$ Ohms; enfriándose el resistor su resistencua varió a salto desde $R_2 = 100$ Ohms hasta $R_1 = 50$ Ohms en el momento de llegar la temperatura a $t_2 = 99$ °C.

En segunda prueba al resistor fue aplicada la tensión constante $U_1 = 60$ V; con ello su temperatura estabilizada resultó ser igual a $t_3 = 80$ °C. Finalmente, cuando al resistor aplicaron la tensión constante $U_2 = 80$ V,

en el circuito surgieron oscilaciones espontáneas de la corriente eléctrica. Determinar el período T de estas oscilaciones, así como los valores máximo y mínimo de la corriente eléctrica. La temperatura del aire en el laboratorio es constante e igual a $t_0 = 20$ °C. La pérdida de calor del resistor es proporcional a la diferencia de las temperaturas del resistor y del aire ambiente.

4. (9no grado). En la tabla se ofrecen los datos experimentales sobre el calor específico c y la masa molar M de algunos metales. A base de estos datos establecer cierta regularidad física y, valiéndose de la misma, determinar los valores faltantes de las magnitudes para el hierro, magnesio y titanio. La constante universal de los gases es R = 8,31 J/(mol·K).

Sustancia	c, $\times 10^3 \frac{J}{kg \cdot K}$	M, $\times 10^{-3} \frac{kg}{mol}$	Sustancia	c, $\times 10^3 \frac{J}{kg \cdot K}$	M, $\times 10^{-3} \frac{kg}{mol}$
Plata	0,238	107	Litio	0,352	7
Aluminio	0,90	27	Magnesio	–	24
Oro	0,128	197	Níquel	0,43	60
Bismuto	0,132	209	Platino	0,131	196
Cobalto	0,417	59	Titanio	–	48
Cobre	0,383	64	Vanadio	0,484	51
Hierro	0,447	–			

5. (10mo grado). El cohete ha sido lanzado desde la superficie de la Tierra verticalmente hacia arriba con primera velocidad cósmica y regresa a la Tierra no lejos del lugar de lanzamiento. ¿Qué tiempo el mismo se hallaba en el vuelo? El radio de la tierra es $R_T = 6400$ km.

Nota. La superficie del elipse con semiejes a y b se calcula por la fórmula $S = \pi ab$.

6. (10mo grado). El objetivo de telescopio de Geyle tiene el diámetro D = 250 cm y la distancia focal F = 160 m. El telescopio se usa para tomar vistas del satélite artificial de la tierra que tiene el diámetro d = 200 cm y se halla a la distancia L = 320 km. ¿A qué distancia del foco de objetivo debe estar dispuesta la placa fotográfica? ¿Qué tamaño tendrá la imagen del satélite artificial? ¿Cuál es el diámetro de las imágenes vagas (no enfocadas) de las estrellas en la foto?

PROBLEMAS EXPERIMENTALES

1. (8vo grado). Determinar la potencia del calentador.

Aparatos y materiales: manantial de corriente continua (hasta 32 V), probeta graduada para 250 ml, agua, calentador, termómetro (desde 0

hasta 100 °C) conductores de conexión, llave, cronómetro, papel milimetrado para construir los gráficos. El calor específico del agua es $c = 4200$ J/(kg·K).

2. (9no grado). Determinar la carga en las armaduras del condensador con la tensión de 40 V.

Aparatos y materiales: condensador, microamperímetro, resistor, cronómetro, conmutador.

3. (9no grado). Determinar el calor específico del líquido desconocido si se conoce el calor específico del agua. Para solucionar el problema no se puede mezclar los líquidos.

Aparatos y materiales: agua, líquido desconocido, calorímetro, balanza escolar y pesas para la misma, hornillo eléctrico, papel de filtro, cuerpos de sustancia de calor específico desconocido..

4. (10 grado). Determinar la inductancia y la resistencia activa de la bobina de choque con el núcleo de hierro.

Aparatos y materiales: bobina de choque con el núcleo de hierro, resistor activo, condensador, voltímetro de corriente alterna, manantial de corriente alterna de 50 Hz de frecuencia.

5. (10mo grado). Determinar la sensibilidad de las fotocélulas en el régimen del cortocircuito y en el régimen de carga activa. Construir el gráfico de dependencia entre el rendimiento de la fotocélula y la iluminación con el valor constante de la resistencia de carga. Con ayuda de una fotocélula comprobar la ley de iluminación.

Aparatos y materiales: fotocélula, resistor variable, voltímetro de corriente continua, amperímetro de corriente continua, lámpara de incandescencia, manantial de alimentación para la lámpara de incandescencia.

PROBLEMAS EXPERIMENTALES DE OLIMPIADAS REPUBLICANAS

A continuación se ofrecen los problemas experimentales más interesantes propuestos en las rondas republicanas de la Olimpiada de física de la Unión Soviética.

1. (8vo grado). Determinar con precisión máxima posible el espesor de la laminilla.

Aparatos y materiales: laminilla de aluminio, balanza y pesas, micrómetro, regla.

2. (8vo grado). Determinar el grosor de un cabello.

Aparatos y materiales: micrómetro, microscopio, papel milimetrado, cabello.

3. (8vo grado). Determinar la masa de la regla y la densidad de sustancia de la cual está hecha.

Aparatos y materiales: regla, dos monedas de 5 kopeks.

4. (8vo grado). Determinar la densidad del aire.

Aparatos y materiales: globo para pesar el aire, balanza y pesas, bomba de vacío, recipiente con agua de capacidad de 1,5–2 l, probeta graduada de capacidad de 1 l.

5. (8vo grado). Investigar la dependencia entre la velocidad de caída de los perdigones en la glicerina y su radio.

Aparatos y materiales: probeta graduada con glicerina, juego de perdigones de plomo de diferente diámetro, regla, cronómetro, micrómetro.

6. (8vo grado). Determinar el coeficiente de rozamiento de resbalamiento del acero contra la madera.

Aparatos y materiales: dos reglas de madera, bola de acero.

7. (8vo grado). Determinar la fuerza máxima de tensión que puede soportar el sedal. Apreciar los errores de mediciones para distintos métodos de ejecución del trabajo.

Aparatos y materiales: trípode con manguito y patilla, sedal de 0,1–0,2 mm de diámetro, regla, pesa de 0,5 kg de masa.

8. (9no grado). Determinar la masa molar del aire.

Aparatos y materiales: globo para pesar el aire, manómetro, bomba de vacío, balanza y pesas, tubo de goma, termómetro.

9. (9no grado). Determinar la temperatura del filamento de la lámpara de incandescencia.

Aparatos y materiales: manantial de corriente, lámpara de incandescencia, avómetro, termómetro, conductores de conexión.

10. (9no grado). Determinar la resistencia del amperímetro. Calcular y confeccionar el shunt para ampliar 5 veces la escala del amperímetro.

Aparatos y materiales: dos amperímetros de laboratorio de estudio, manantial de corriente continua (4 V), conductor de cobre de 0,5-1 mm de diámetro, reóstato, conductores de conexión, regla.

11. (10mo grado). Investigar la dependencia entre el período de vibraciones torsionales de la varilla suspendida de su centro al sedal y la longitud y el diámetro del último. Explicar los resultados obtenidos.

Aparatos y materiales: juego de sedales de diferente diámetro, varilla metálica, trípode con manguito y patilla, micrómetro, regla, cronómetro.

12. (10mo grado). Calcular y medir el período de oscilaciones verticales de la probeta con arena en el recipiente con agua. Comparar los resultados obtenidos. ¿Se hallan comprendidas o no las divergencias obtenidas entre la teoría y el ensayo dentro de los límites del error de mediciones?

Aparatos y materiales: recipiente con agua, probeta, arena, balanza y pesas, regla, hilo, cronómetro (o reloj con segundero).

13. (10mo grado). Determinar la inductancia de la bobina.

Aparatos y materiales: manantial de corriente continua (4 V), amperímetro, bobina de choque, núcleo de acero, diodo, condensador de capacidad conocida (más de 8μF), voltímetro, conductores de conexión, llave.

14. (10mo grado). Determinar la capacidad eléctrica del condensador.

Aparatos y materiales: manantial de corriente alterna, condensador de capacidad conocida C, condensador de capacidad desconocida C_x, auriculares de gran resistencia óhmica, reocordio, conductores de conexión.

15. (10mo grado). Determinar la distancia focal de la lente divergente. Cumplir la tarea por varios métodos y compararlos según la precisión de medición de la magnitud incógnita.

Aparatos y materiales: lente divergente, regla, lente convergente, pantalla, bombilla de 3,5 V, pila eléctrica para la linterna de bolsillo, conductores de conexión.

INDICE TEMATICO DE LOS PROBLEMAS

Con fines de hacer más cómodo el uso del presente libro por alumnos de distintos grados aquí se ofrece la distribución de los problemas de olimpiadas incluidos en el mismo por partes y temas del curso escolar de física.

PROBLEMAS DE CALCULO

Mecánica

Cinemática: 31, 61, 100, 119, 169, 224, 225, 243, 262, 298, 299, 302, 315, 319, 324.

Dinámica: 4, 5, 6, 9, 22, 30, 32, 37, 43, 56, 69, 75, 76, 99, 101, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 166, 170, 193, 195, 197, 198, 203, 209, 211, 220, 227, 232, 233, 253, 264, 271.

Aerodinámica: 126, 316, 320.

Estática, hidrostática: 1, 7, 12, 16, 34, 35, 36, 42, 57, 64, 65, 83, 86, 87, 97, 98, 106, 120, 142, 210, 215, 244, 246, 261, 282, 283.

Leyes de conservación en la mecánica: 2, 11, 17, 19, 21, 24, 47, 48, 49, 63, 84, 89, 90, 102, 124, 125, 151, 167, 217, 228, 269, 281, 285, 303.

Física molecular y termodinámica

Teoría molecular-cinética: 78, 172, 213, 249, 268, 272, 288, 321.

Propiedades de sustancia: 33, 40, 50, 51, 62, 95, 127, 201, 250, 306.

Termodinámica: 20, 27, 29, 58, 66, 77, 80, 91, 103, 152, 171, 176, 212, 229, 248, 266, 284, 304, 305, 317.

Electrodinámica

Electrostática: 8, 23, 54, 55, 68, 81, 155, 174, 177, 199, 214, 226, 235, 247, 273, 322.

Leyes de corriente continua: 3, 10, 15, 44, 45, 60, 82, 88, 94, 104, 121, 123, 143, 153, 168, 173, 196, 200, 231, 245, 263, 265, 267, 274, 280, 286, 287, 289, 301, 308, 318, 323, 326.

Electromagnetismo: 26, 28, 39, 52, 92, 128, 129, 178, 179, 204, 205, 219, 230, 270, 290, 309.

Oscilaciones y ondas

41, 130, 154, 202, 218, 236, 254, 325, 327.

Optica

Optica geométrica: 13, 25, 38, 53, 59, 79, 85, 93, 96, 105, 122, 131, 175, 216, 234, 251, 328.

Optica física: 67, 148, 156, 252, 273.

PROBLEMAS EXPERIMENTALES

Mecánica

70, 71, 110, 112, 113, 133, 135, 158, 159, 160, 161, 180, 182, 184, 192, 206, 237, 238, 256, 275, 276, 292, 293, 294, 310, 311, 329, 330.

Física molecular y termodinámica

73, 74, 111, 114, 116, 136, 137, 138, 139, 162, 183, 207, 257, 277, 279, 331.

Electrodinámica

72, 107, 108, 109, 115, 117, 132, 134, 140, 141, 157, 165, 185, 186, 187, 188, 190, 191, 208, 222, 239, 240, 255, 258, 259, 279, 295, 296, 313, 332.

Oscilaciones y ondas

163, 181, 189, 221, 333.

Optica

118, 164, 223, 241, 242, 260, 278, 279, 297, 314, 334.

Impreso por VIPO "Vneshtorgizdat" por pedido especial de "Ediciones Cubanas" para la editorial "Pueblo y Educación"

Отпечатано в тип. ВТИ
по заказу "Эдисионес Кубанас"
для издательства "Пуэбло и
Эдукасьон" Изд. № Е — 2547
Зак. 13047